

Diese Arbeit wurde vorgelegt am Institut für Stahlbau.
The present work was submitted to the Institute of Steel Construction.

**Univ.-Prof. Dr.-Ing.
Markus Feldmann**

Mies-van-der-Rohe-Str. 1
D-52074 Aachen

Telefon: +49 241 80-25177
Fax: +49 241 80-22140

feldmann@stb.rwth-aachen.de
www.stb.rwth-aachen.de

Masterarbeit

Probabilistische Bemessung von Verbundträgern - Übertragbarkeit spröder und duktiler Daniels-Systeme auf die Verbundfuge

Probabilistic design of composite girders - Transferability of brittle and ductile Daniels systems to the composite joint

von / presented by **Henrika Priebe**

(Matr.-Nr.: 369048)

Betreuer: Kevin Wolters, M. Sc.

1. Prüfer: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Markus Feldmann
2. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Benno Hoffmeister

Aachen, 13. September 2022

Nomenklatur

Im Rahmen dieser Arbeit werden die folgenden Formelzeichen verwendet:

Lateinische Buchstaben

A	Querschnittsfläche
C_{fx}	Federsteifigkeit
C_{fx}^*	Approximierte/ angepasste Federsteifigkeit
C_n	Korrekturfunktion (nach Daniels)
$Cov[X, Y]$	Kovarianz von X und Y
D_n	Standardabweichung (nach Daniels)
E	Elastizitätsmodul; E-Modul
E	Einwirkung
E_a	E-Modul des Stahls
E_c	E-Modul des Betons
E_d	Bemessungswert Einwirkung
E_k	Charakteristische Einwirkung
E_n	Erwartungswert (nach Daniels)
$E[X]$	Erwartungswert von X
e_x	Dübelabstand
F_d	Bemessungswert der Einzellast (Einwirkung)
f_u	Zugfestigkeit
f_y	Streckgrenze
$F(x)$	Verteilungsfunktion
$f(x)$	Dichtefunktion
$g(x)$	Grenzzustandsgleichung
I_a	Flächenträgheitsmoment des Stahlprofils
I_c	Flächenträgheitsmoment des Betonquerschnitts

L_{ges}	(Gesamt-)länge eines Trägers
$M_{pl,a,Rd}$	plastische Momententragfähigkeit des Stahlprofils
$M_{pl,Rd}$	plastische Momententragfähigkeit
M_{Rd}	Momententragfähigkeit
N_a	Normalkraft im Stahlprofil
N_c	Normalkraft im Betonquerschnitt
N_{Ed}	Bemessungswert der Einwirkung
$N_{pl,a}$	Plastischer Normalkraftwiderstand des Stahlprofils
$N_{pl,Rd}$	Plastischer Normalkraftwiderstand des Gesamtquerschnitts
P_f	Versagenswahrscheinlichkeit
P_{Rd}	Bemessungswert der (Längs-)Schubtragfähigkeit eines Dübels
P_{Rk}	charakteristische (Längs-)Schubtragfähigkeit eines Dübels
$Pr(F)$	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses F (hier: $F = failure$)
$Pr(F_{Sys,n})$	Systemversagenswahrscheinlichkeit
p	Wahrscheinlichkeit
R	Widerstand
R_d	Bemessungswert Widerstand
R_k	Charakteristischer Widerstand
s	Last
$Var[X]$	Varianz von X
var	Variationskoeffizient
x_p	Quantilwert
Z	Ergebnisverteilung
z	Innerer Hebelarm

Griechische Buchstaben

α_s	Beiwert für die Schlupffunktion
β	Sicherheitsindex (auch: Zuverlässigkeitsindex)
β_1	Sicherheitsindex für $n = 1$
β_{EC}	Sicherheitsindex, der sich für eine Bemessung nach Eurocode ergibt
β_s	Beiwert für die Schlupffunktion
γ	Teilsicherheitsbeiwert
γ_a	Teilsicherheitsbeiwert für Stahl
γ_c	Teilsicherheitsbeiwert für Beton
γ_G	Teilsicherheitsbeiwert für ständige Einwirkungen
γ_V	Teilsicherheitsbeiwert für Verbundmittel
δ	Schlupf
ε	Dehnung
η	Verdübelungsgrad
κ	Abminderungsfaktor
μ	Mittelwert
ρ	Korrelationskoeffizient
Φ	Standardnormalverteilung
σ	Standardabweichung
ψ	Kombinationsbeiwert

Abkürzungen

bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
d.h.	das heißt
DIN	Deutsches Institut für Normung
EN	Europäische Norm
FORM	First Order Reliability Method
ggf.	gegebenenfalls
HLRF	Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (-Algorithmus)
i.d.R.	in der Regel
ISO	International Standards Organization
RC	Zuverlässigkeitsklasse (eng.: reliability class)
z.B.	zum Beispiel

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Stand der Technik.....	2
2.1	Verbundträger	2
2.1.1	Verbundmittel	2
2.1.2	Bemessung von Verbundträgern	4
2.1.3	Schlupf in Verbundfugen.....	5
2.2	Probabilistik	6
2.2.1	Normalverteilung und Standardnormalverteilung	6
2.2.2	Korrelation	8
2.2.3	Kombination normalverteilter Größen	8
2.2.4	Weibull-Verteilung	9
2.2.5	Quantilwerte	10
2.3	Systemzuverlässigkeit.....	10
2.3.1	Sicherheitsindex und Versagenswahrscheinlichkeit	10
2.3.2	First Order Reliability Method	12
2.3.3	Monte-Carlo-Simulationen	16
2.3.4	Bemessung mit Teilsicherheitsbeiwerten.....	18
3	Daniels-Systeme	21
3.1	Ideal-spröde Systeme	21
3.1.1	Theorie	21
3.1.2	Numerische Untersuchungen	28
3.1.3	Vergleich von Theorie und Numerik	30
3.2	Ideal-spröde Systeme mit ungleicher Lastverteilung.....	32
3.2.1	Theorie	33
3.2.2	Numerische Untersuchungen	35
3.2.3	Vergleich von Theorie und Numerik	36
3.3	Ideal-plastische Systeme	37
3.3.1	Theorie	37

3.3.2	Numerische Untersuchungen	39
3.3.3	Vergleich von Theorie und Numerik	41
3.4	Ideal-plastische Systeme mit korrelierten Widerständen.....	42
3.4.1	Theorie	42
3.5	Abgrenzung von Serien- und Parallelsystem.....	44
3.5.1	Ideales Seriensystem.....	44
3.5.2	Ideales Parallelsystem	44
3.5.3	Gegenüberstellung.....	45
4	Verbundträger.....	47
4.1	Stabwerkmodell.....	47
4.1.1	Annahmen.....	48
4.1.2	Voruntersuchungen	48
4.1.3	Zusammenhänge von Last, Dübelkraft und Schlupf	49
4.1.4	Gegenüberstellung von Schlupf und Schlupffunktion	51
4.2	Anwendung der (Daniels-) Systeme auf die Verbundfuge.....	52
4.2.1	Ideal-sprödes System mit $n=1$	53
4.2.2	Ideal-sprödes Seriensystem	53
4.2.3	Ideal-sprödes Daniels-System	56
4.2.4	Ideal-plastisches System	56
4.2.5	Ideal-plastisches System mit korrelierten Widerständen.....	57
4.2.6	Anpassung der Steifigkeit.....	58
4.2.7	Ungleiche Lastverteilung.....	59
4.2.8	Plastische Grenzzustandsgleichung (FORM).....	64
4.3	Vergleich der verschiedenen Modelle.....	67
5	Anwendung auf Teilsicherheitsbeiwerte	71
5.1	Allgemeines	71
5.2	Ideal plastische Systeme.....	72
5.2.1	Theoretische Herleitung.....	72
5.2.2	Anwendung auf Modell.....	75
5.3	Plastische Grenzzustandsgleichung (FORM)	77

5.3.1 Theoretische Überlegungen.....	77
5.3.2 Numerische Untersuchungen	78
6 Zusammenfassung und Ausblick.....	82
7 Literatur	84
A Anhang.....	i

1 Einleitung

Bei der Bemessung eines Verbundträgers wird aktuell der Ausfall des höchstbelasteten Dübels als Versagenskriterium der Verbundmittel berücksichtigt. Das Trägerversagen wird also durch den Ausfall eines Dübels ausgelöst, eventuell mögliche Kraftumlagerungen werden nicht berücksichtigt. Somit sind in der vorhandenen Bemessung versteckte Sicherheiten vorhanden, was zu einer konservativeren Bemessung führt, als es aus probabilistischer Sicht notwendig wäre.

Ein System, bei dem Kraftumlagerungen berücksichtigt werden, ist das sogenannte Daniels-System. Dieses ursprünglich für die Tragfähigkeit von Fadenbündeln entwickelte probabilistische Modell kann auf andere Bereiche angewendet werden, wie beispielsweise auf Stahlseile. Je mehr Einzeldrähte für ein Seil verwendet werden, desto genauer kann vorhergesagt werden, wie hoch die maximale Last oder die Versagenswahrscheinlichkeit ist. Die Sicherheit eines Daniels-Systems steigt zudem mit zunehmender Anzahl der Einzeldrähte. Das Prinzip der Daniels-Systeme wird in dieser Arbeit auf die Verbundfuge angewendet. So soll probabilistisch nachgewiesen werden, dass auch für eine Verbundfuge bei Berücksichtigung mehrerer Verbundmittel der Sicherheitsindex steigt.

Nach einem Einstieg in die Themen Verbundbau, Probabilistik und Systemzuverlässigkeit sollen das erwähnte Daniels-System sowie verschiedene Erweiterungen, welche die Lastverteilung und das Materialverhalten betreffen, vorgestellt werden. Im Anschluss sollen diese theoretischen Modelle auf die Verbundfuge übertragen und angepasst werden. Die sich aus den verschiedenen Modellen ergebenden Sicherheitsindizes werden in einem letzten Schritt auf die Bemessung von Verbundträgern übertragen.

2 Stand der Technik

In diesem Kapitel werden die wesentlichen, für diese Arbeit erforderlichen Grundlagen aus den Themengebieten Verbundbau, Probabilistik und Systemzuverlässigkeit vorgestellt.

2.1 Verbundträger

Im Verbundbau werden die Werkstoffe Stahl und Stahlbeton zu einem Gesamtquerschnitt mit neuen Querschnittswerten kombiniert. Die Vorteile beider Baustoffe werden somit genutzt. Die Verbundträger stellen neben den Verbunddecken und den Verbundstützen ein typisches Tragelement des Verbundbaus dar, Anwendung finden sie sowohl im Hoch- als auch im Brückenbau.

Die Verbindung der beiden Werkstoffe wird über Verbundmittel hergestellt. Diese übertragen die entstehenden (Längs-)Schubkräfte. In den meisten Anwendungsfällen sind dies Kopfbolzendübel, es wird aber auch immer mehr an der Verbunddübelleiste geforscht. [1, 2]

Diese beiden Verbundmittel und die Bemessung von Verbundträgern werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

2.1.1 Verbundmittel

Am häufigsten finden Stahlbolzen mit Kopf, die sog. Kopfbolzendübel, Anwendung im Verbundbau. Die Dübel werden einzeln mit einem automatisierten Schweißverfahren, dem Lichtbogenbolzenschweißen, auf einen Stahlträger in ein oder mehreren Reihen aufgeschweißt.

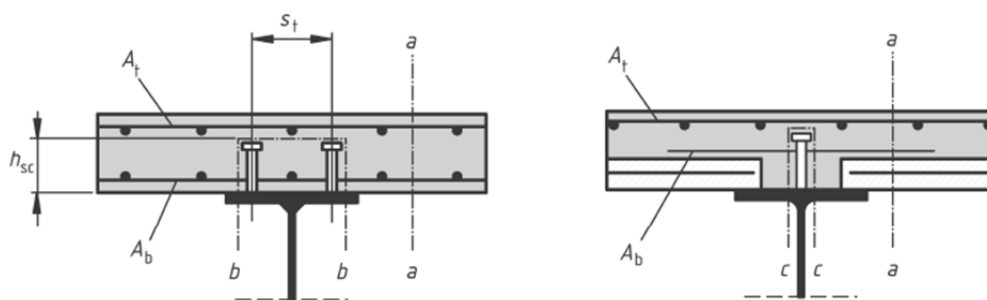


Abbildung 2-1: Verbundträger mit aufgeschweißten Kopfbolzendübeln [2]

In der DIN EN ISO 13918 [3] finden sich Anforderungen an die Kopfbolzendübel bezogen auf den Schweißvorgang. Diese betreffen die Werkstoffeigenschaften, wie z.B. die Schweißeignung, oder die erforderlichen Abmessungen.

Die Bemessung von Kopfbolzendübeln ist normativ in der DIN EN 1994 [2] geregelt. Diese müssen die Längsschubkraft in der Verbundfuge übertragen können. Die charakteristische Längsschubtragfähigkeit P_{Rk} je Dübel berechnet sich aus dem Minimum aus Dübel- und Be-

tonversagen. Die Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit enthält ebenfalls Konstruktionsregeln für die Verbundsicherung. Es finden sich dort auch die Anforderungen an die Abmessungen und Abstände von Kopfbolzendübeln. Wenn sie eine charakteristische Verformung δ_{uk} von mindestens 6 mm aufweisen, können die Kopfbolzendübel als duktile Verbundmittel klassifiziert werden. Bei duktilen Verbundmitteln wird die Annahme getroffen, dass das Verhalten in der Verbundfuge ideal-plastisch ist, sofern die Anforderungen an den Mindestverdübelungsgrad eingehalten werden. [2]

Eine weitere Variante der Verbundmittel sind die Verbunddübelleisten. Die möglichen Formen sind dabei die Puzzle- oder Klothoidenform, siehe Abbildung 2-2. Diese werden aus Stahlblechen mittels Brennschnitt hergestellt und anschließend auf ein Stahlprofil aufgeschweißt oder aus dem Steg eines Profils geschnitten. [4]

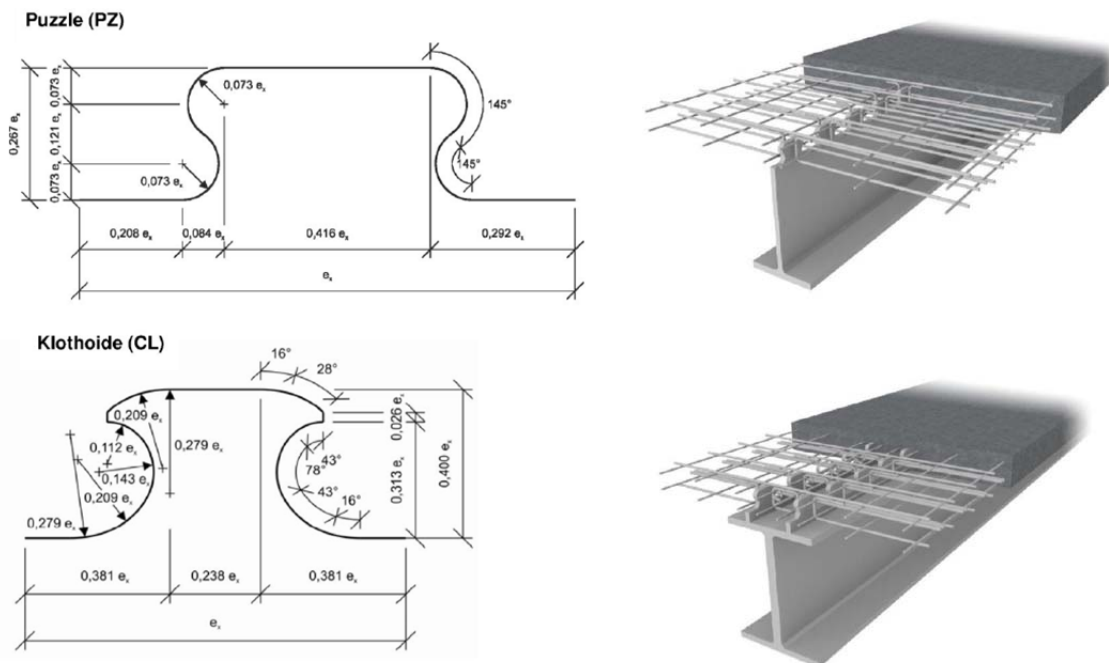


Abbildung 2-2: Verschiedene Verbunddübelleisten [4]

Die Bemessung von Verbunddübelleisten ist in der Allgemeinen Bauartgenehmigung [4] beschrieben. Für die Berechnung der Längsschubtragfähigkeit werden drei Versagensarten unterschieden. So wird der minimale Wert P_{Rk} je Dübel für Abscheren, Ausstanzen und Stahlversagen maßgebend für die Bemessung. Auch die Konstruktionsregeln für die Verbundsicherung sind hier zu finden. Verbunddübelleisten, deren Entwurf und Bemessung nach der Allgemeinen Bauartgenehmigung erfolgt, dürfen als duktil klassifiziert werden.

2.1.2 Bemessung von Verbundträgern

Die Bemessung von Verbundträgern erfolgt nach DIN EN 1994 [2] auf der Grundlage der Grenzzustände der Tragfähigkeit und der Gebrauchstauglichkeit. Für den zusammengesetzten Querschnitt sind zum einen die Querschnittsnachweise und zum anderen die Nachweise für die Verbundfuge zu führen. Ebenfalls zu beachten sind dabei nicht-statische Lasten.

Die Querschnittstragfähigkeit muss in kritischen Schnitten nachgewiesen werden. Dazu gehören die Nachweise der Tragfähigkeit bei Momenten- und Querkraftbeanspruchung sowie für deren Interaktion. Solche kritischen Querschnitte sind zum Beispiel Stellen extremaler Biegemomente, Auflagerpunkte oder Angriffspunkte konzentrierter Einzellasten. Weitere zu führende Nachweise, wie z.B. Schubbeulen oder Biegedrillknicken, werden im Rahmen dieser Masterarbeit nicht weiter betrachtet. Es geht nur um die Tragfähigkeit der Verbundfuge. Die wesentlichen relevanten Elemente der Bemessung für diese Arbeit sind die Schubtragfähigkeit der Verbundmittel sowie die plastische Momententragfähigkeit des Trägers.

Für Kopfbolzendübel und Verbunddübelleisten gelten für die Berechnung der charakteristischen Längsschubtragfähigkeit sowie für die geometrischen Anwendungsgrenzen die DIN EN 1994 oder die Allgemeine Bauartgenehmigung der Verbunddübelleiste. Der Bemessungswert der Längsschubkrafttragfähigkeit eines Verbundmittels wird mithilfe des Teilsicherheitsbeiwertes γ_V bestimmt:

$$P_{Rd} = \frac{P_{Rk}}{\gamma_V} = \frac{P_{Rk}}{1,25} \quad (2.1)$$

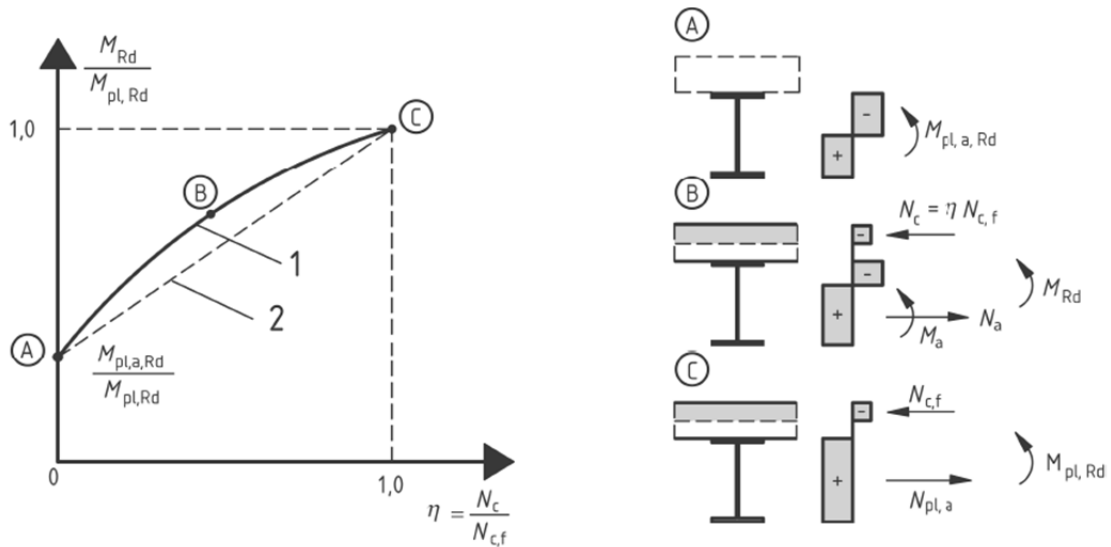
Mit diesem Bemessungswert kann die erforderliche Anzahl der Dübel für die einwirkende Längskraft bestimmt werden:

$$n_{min} = \frac{\text{einwirkende Längskraft}}{P_{Rd} (\text{eines Dübels})} \quad (2.2)$$

Für Querschnitte, die mindestens der Querschnittsklasse 2 zugeordnet werden können, darf die Anzahl der erforderlichen Dübel auch über die Teilverbundtheorie bestimmt werden. Es liegt dann keine volle Verdübelung, sondern eine Teilverdübelung vor. Bevor das vollplastische Moment des Verbundträgers erreicht wird, tritt rechnerisch ein Versagen der Verbundfuge ein. Der vorhandene Verdübelungsgrad kann bestimmt werden zu:

$$\eta = \frac{N_c}{N_{cf}} = \frac{N_a}{N_{pl,a}} \quad (2.3)$$

Ist kein Verbund ($\eta = 0$) vorhanden, entspricht die plastische Momententragfähigkeit des Trägers der des Stahlprofils $M_{pl,a,Rd}$. Ist eine vollständige Verdübelung ($\eta = 1$) gegeben, kann der gesamte Verbundquerschnitt angesetzt werden. [1]



Legende

- 1 Teilverbundtheorie
- 2 vereinfachte Berechnung

Abbildung 2-3: Zusammenhang zwischen der plastischen Momententragfähigkeit $M_{pl,Rd}$ und dem Verdübelungsgrad η [2]

Vereinfacht kann eine Linearisierung erfolgen, wie sie in Abbildung 2-3 dargestellt ist. Unter Berücksichtigung des Verdübelungsgrades η lässt sich die plastische Momententragfähigkeit im Fall teilweiser Verdübelung zu

$$M_{Rd} = M_{pl,a,Rd} + (M_{pl,Rd} - M_{pl,a,Rd}) \cdot \eta \quad (2.4)$$

berechnen.

Bei Anwendung der Teilverbundtheorie müssen gewisse Anwendungsgrenzen beachtet werden. Unter anderem muss das Verformungsvermögen der Verbundmittel berücksichtigt werden. Diese müssen als duktil eingestuft sein.

Es muss zudem beachtet werden, dass der Stahlträger sowohl auf Biegung als auch auf Normalkraft beansprucht wird. Übersteigt die einwirkende Normalkraft N_{Ed} den Wert $0,25 \cdot N_{pl,Rd}$, darf nach DIN EN 1993 [5] nur ein reduziertes plastisches Widerstandsmoment berücksichtigt werden. Wird nicht die Linearisierung, sondern die genaue Berechnung verwendet, kann auf diese Bedingung verzichtet werden. Die Lösung ist dann mechanisch exakt.

2.1.3 Schlupf in Verbundfugen

Als Schlupf δ werden die Relativverschiebungen zwischen Beton und Stahl in der Verbundfuge bezeichnet. In Abbildung 2-4 ist der Schlupfverlauf eines Verbundträgers für den Lastfall einer Streckenlast dargestellt.

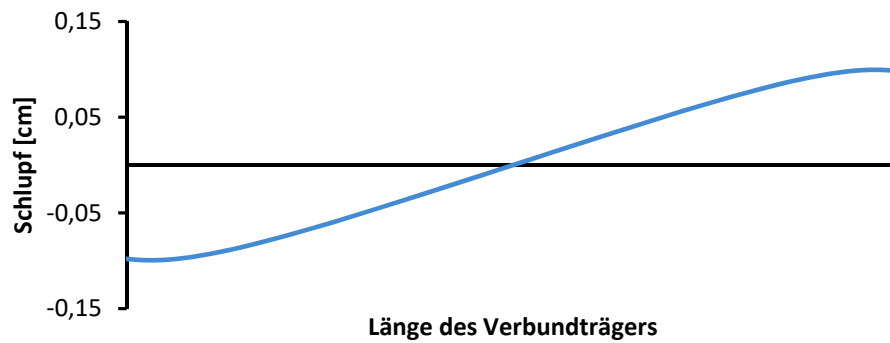


Abbildung 2-4: Schlupfverlauf für einen Beispielträger unter Belastung einer Streckenlast

Der Effekt des Schlupfes tritt beispielsweise auch bei Verbundglasscheiben auf. In [7] wurden auf Grundlage der allgemeinen Schlupfdifferentialgleichung Schlupfverlaufsfunktionen für verschiedene Lastfälle hergeleitet. Einige Beispiele finden sich im Anhang, Tabelle A1. In den Funktionen sind Beiwerte enthalten, die Querschnitts- und Materialparameter enthalten. Diese können wie folgt auch für einen Verbundträger bestimmt werden. Damit kann die Schlupffunktion auf Verbundträger übertragen werden.

$$\alpha_s^2 = \frac{C_{fx}}{e_x} \cdot \left[\frac{z^2}{E_a I_a + E_c I_c} + \frac{1}{E_a A_a} + \frac{1}{E_c A_c} \right] \quad (2.5)$$

$$\beta_s = \frac{z}{E_a I_a + E_c I_c} \quad (2.6)$$

In dieser Arbeit wurden nur bestimmte symmetrische Lastfälle betrachtet, daher sind die Ausführungen aus [7] ausreichend. Grundlage dieser Lösungen der allgemeinen Schlupfdifferentialgleichung ist die Annahme einer kontinuierlichen Schubkraftübertragung. In der Realität tritt ein Schlupfabfall am Trägerende auf, dies wurde bei Versuchen beobachtet. Dieser Effekt wird in den Formulierungen nicht berücksichtigt. [6]

2.2 Probabilistik

Die Probabilistik ist wie die Statistik ein Teilgebiet der Stochastik, der sogenannten Lehre der Wahrscheinlichkeitstheorie. Mithilfe der Statistik werden numerische Daten erhoben, beschrieben, analysiert und interpretiert. Die Probabilistik beruht auf dem Konzept, dass Ereignisse nicht mit absoluter, sondern nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit vorhersagbar sind. Es werden Modelle zur Beschreibung zufälliger Ereignisse definiert. [8]

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen aus der Probabilistik vorgestellt, die für das Verständnis der Ausführungen in dieser Arbeit besonders von Bedeutung sind.

2.2.1 Normalverteilung und Standardnormalverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Normalverteilung ist eine stetige symmetrische Verteilung und wird als Dichtefunktion $f(x)$ bezeichnet. Diese wird über den Mittelwert μ_x und

die Standardabweichung σ_X beschrieben und hat ihr Maximum bei μ_X sowie ihre Wendepunkte bei $x = \mu_X \pm \sigma_X$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.7)$$

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ ist die Integration der Dichtefunktion. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable maximal den Wert x annimmt.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \quad (2.8)$$

In Abbildung 2-5 sind die Dichte und Verteilungsfunktionen verschiedener Normalverteilungen dargestellt, die jeweils über den Mittelwerte μ_X und die Standardabweichung σ_X definiert sind. Der Zusammenhang dieser beiden Größen ist über den Variationskoeffizienten $var_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$ gegeben.

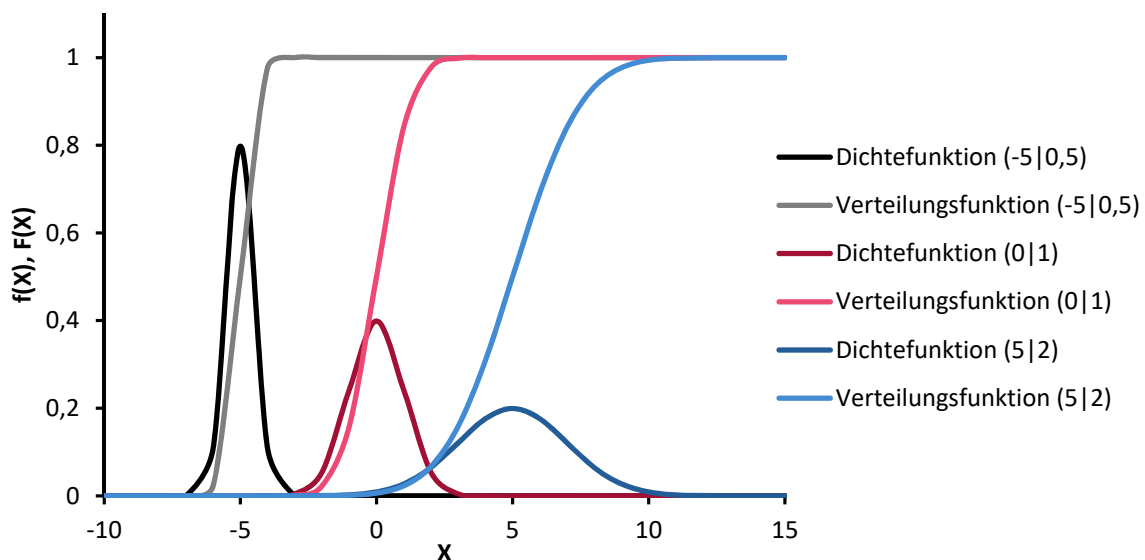


Abbildung 2-5: Dichte- und Verteilungsfunktionen verschiedener Normalverteilungen ($\mu | \sigma$)

Ein Sonderfall der Normalverteilung ist die Standardnormalverteilung Φ mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Der Zusammenhang zwischen einer beliebigen Normalverteilung F_X , verteilt mit μ_X und σ_X , und Φ lässt sich durch

$$F_X(x) = F_0\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (2.9)$$

beschreiben. [9]

2.2.2 Korrelation

Die Korrelation beschreibt die Abhängigkeit bzw. den linearen Zusammenhang zweier Zufallsvariablen. Die Varianz einer Zufallsvariable X ist ein Maß dafür, wie stark die Verteilung um den Erwartungswert streut und wird bestimmt zu:

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2] \quad (2.10)$$

Die Kovarianz ist ein Maß für die Korrelation. Sie wird wie folgt bestimmt:

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)] \quad (2.11)$$

Der Korrelationskoeffizient ist das standardisierte Äquivalent und berechnet sich zu:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (2.12)$$

Durch diese Standardisierung sind Korrelationskoeffizienten vergleichbar. Der Koeffizient kann nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen. Diese Grenzwerte repräsentieren einen perfekt linearen Zusammenhang zwischen den Größen X und Y . Für einen Korrelationskoeffizienten von $\rho_{XY} = 0,99$ ist dieser Zusammenhang bereits gut zu erkennen, siehe Abbildung 2-6 rechts. [10]

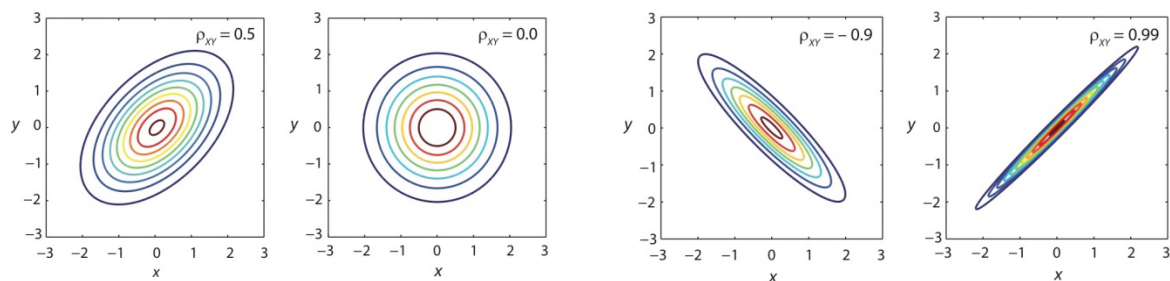


Abbildung 2-6: Binormale Verteilungen mit unterschiedlichen Korrelationskoeffizienten [10]

In der Abbildung sind die Verteilungen für weitere Korrelationskoeffizienten gezeigt. Für $\rho_{XY} = 0$ ist kein Zusammenhang der Größen zu erkennen. Diese Größen gelten dann als nicht korreliert.

2.2.3 Kombination normalverteilter Größen

Werden normalverteilte Größen linear miteinander kombiniert, so ist auch diese Kombination normalverteilt. Für den Fall nicht korrelierter Größen gilt [10]:

$$Y = c + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \dots + a_n \cdot X_n \quad (2.13)$$

$$E[Y] = c + a_1 \cdot E[X_1] + a_2 \cdot E[X_2] + \dots + a_n \cdot E[X_n] \quad (2.14)$$

$$\text{Var}[Y] = a_1^2 \cdot \text{Var}[X_1] + a_2^2 \cdot \text{Var}[X_2] + \dots + a_n^2 \cdot \text{Var}[X_n] \quad (2.15)$$

Auch korrelierte normalverteilte Größen können, wie in Gleichung (2.13), linear kombiniert werden. In diesem Fall wird der Korrelationskoeffizient ρ mit berücksichtigt. Für die Lösung werden weiterhin folgende Hilfwerte bzw. Matrizen verwendet [11]:

$$a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \quad (2.16)$$

$$M_X = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \text{sym.} \\ \rho_{1,2} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 & \sigma_2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Erwartungswert und Varianz der linearen Kombination können so wie folgt bestimmt werden:

$$E[Y] = c + a \cdot M_X \quad (2.19)$$

$$\text{Var}[Y] = a \Sigma_{XX} a^T \quad (2.20)$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit $P_f = \Pr(F)$ lässt sich mit diesen Größen bestimmen zu:

$$\Pr(F) = \Phi\left(-\frac{E[Y]}{\sqrt{\text{Var}[Y]}}\right) \quad (2.21)$$

Der Begriff der Versagenswahrscheinlichkeit wird in Kapitel 2.3.1 genauer erläutert.

2.2.4 Weibull-Verteilung

Die Weibull-Verteilung ist eine zweiparametrische Verteilung mit dem Skalenparameter a und dem Formparameter b . Die Dichtefunktion $f(x)$ und die Verteilungsfunktion $F(x)$ werden mithilfe dieser beiden Parameter für $x \geq 0$ wie folgt definiert. [12]

$$f(x) = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \cdot e^{-(x/a)^b} \quad (2.22)$$

$$F(x) = 1 - e^{-(x/a)^b} \quad (2.23)$$

mit $a > 0$

$b > 0$

Je nach Wahl der Parameter ähnelt die Verteilung einer Normalverteilung oder einer asymmetrischen Verteilung. Dieser Einfluss der Parameter ist in Abbildung 2-7 zu sehen.

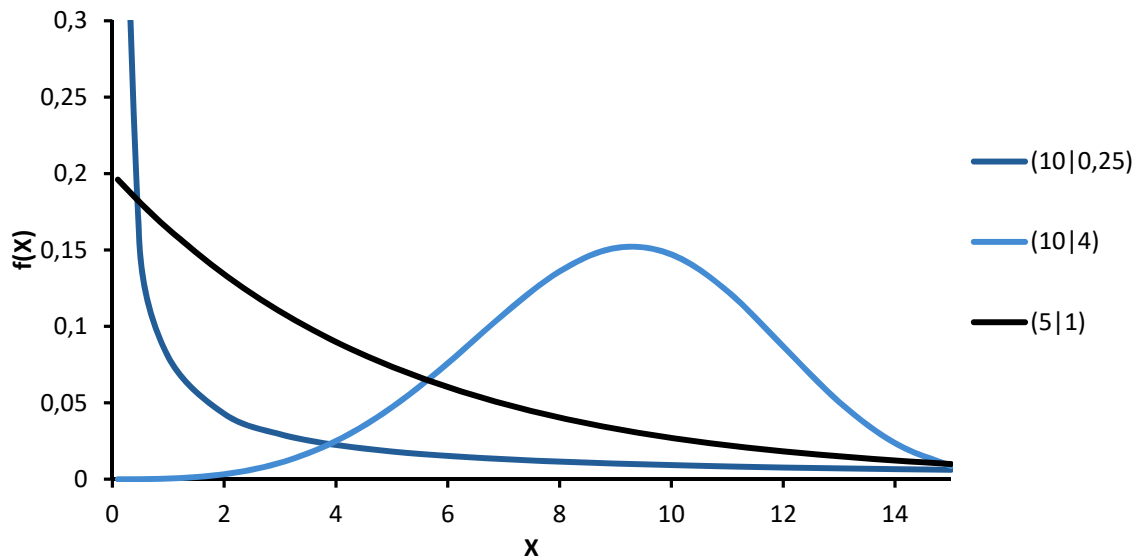


Abbildung 2-7: Dichtefunktionen von Weibullverteilungen mit unterschiedlichen Parametern (a|b)

2.2.5 Quantilwerte

Der Quantilwert x_p bezeichnet den Wert einer Verteilung, der mit der Wahrscheinlichkeit von p unterschritten wird.

$$P(X \leq x_p) = F_X(x_p) = p \quad (2.24)$$

$$\Leftrightarrow x_p = F_X^{-1}(p) \quad (2.25)$$

Im Bauwesen wird der Quantilwert genutzt, um Werte festzulegen, die mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit unter- oder überschritten werden. Weitere Erläuterungen folgen in Kapitel 2.3.4, bei der Bemessung nach Eurocode mit Teilsicherheitsbeiwerten. [13]

2.3 Systemzuverlässigkeit

In diesem Kapitel werden die Parameter zur Beschreibung der Zuverlässigkeit eines Systems sowie Methoden zu deren Bestimmung vorgestellt. Zudem wird die Bemessung von Tragwerken nach Eurocode vorgestellt.

2.3.1 Sicherheitsindex und Versagenswahrscheinlichkeit

Als Maß für die Zuverlässigkeit können verschiedene Parameter angeführt werden. Sowohl die Überlebens- als auch die Versagenswahrscheinlichkeit und der Sicherheitsindex, auch Zuverlässigkeitsindex genannt, werden dafür verwendet. Diese Parameter sind alle voneinander abhängig und können alle bestimmt werden, wenn einer bekannt ist.

Für die Definition der Systemzuverlässigkeit wird ein System mit dem Widerstand R und der Einwirkung S betrachtet. Die Ergebnisverteilung lässt sich ausdrücken als:

$$Z = R - S \quad (2.26)$$

Für $Z \leq 0$ ist die Einwirkung S größer als der vom System bereitgestellte Widerstand R und das System versagt. Überleben ist demnach für $Z > 0$ gegeben.

Die Versagenswahrscheinlichkeit P_f gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Wert des Widerstandes R (normalverteilt mit μ_R und σ_R) höchstens den Wert der Einwirkung S annimmt. Somit kann sie für den normalverteilten Fall ausgedrückt werden als:

$$P_f = F_R(S) = \Phi\left(\frac{S - \mu_R}{\sigma_R}\right) \quad (2.27)$$

In Abbildung 2-8 findet sich die Darstellung der Dichtefunktion der Ergebnisverteilung $Z = R - S$. Der Versagensbereich $Z \leq 0$ ist farblich hervorgehoben. Die Versagenswahrscheinlichkeit P_f entspricht der gekennzeichneten Fläche.

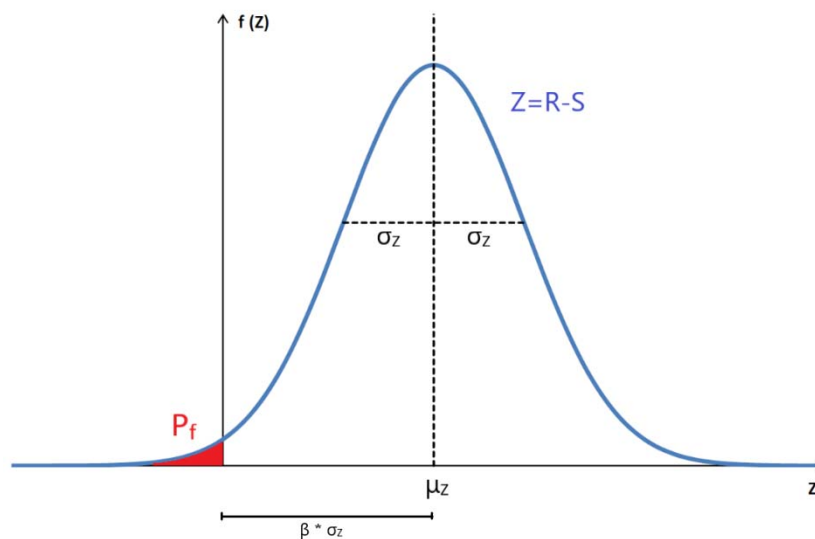


Abbildung 2-8: Darstellung von Sicherheitsindex β und Versagenswahrscheinlichkeit P_f an der Ergebnisverteilung Z

Der Abstand vom Mittelwert μ_Z zum Versagensbereich $Z \leq 0$ wird durch $\beta \cdot \sigma_Z$ beschrieben. Dabei ist β der Sicherheitsindex. Der Zusammenhang von Sicherheitsindex und Versagenswahrscheinlichkeit ist durch die Standardnormalverteilung gegeben. [14]

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (2.28)$$

Aufgrund der Symmetrie der Verteilung entspricht die Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$P_s = 1 - P_f = \Phi(\beta) \quad (2.29)$$

In Abbildung 2-9 finden sich die Darstellung dieser Zusammenhänge sowie einige Werte für die Sicherheitsindizes β für Versagenswahrscheinlichkeiten von $1 \cdot 10^{-3}$ bis $1 \cdot 10^{-10}$.

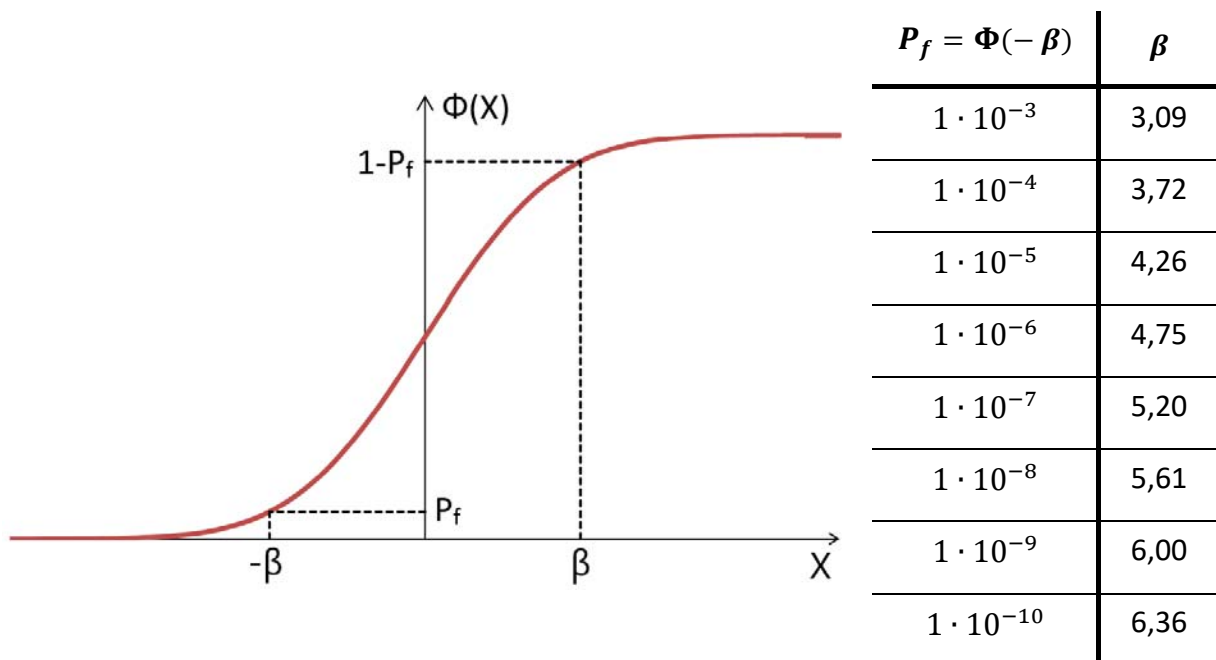


Abbildung 2-9: Darstellung von β und P_f an der Standardnormalverteilung Φ ; Werte des Sicherheitsindex β für verschiedene Versagenswahrscheinlichkeiten

In der DIN EN 1990 [14] sind drei Zuverlässigkeitsklassen RC (eng.: Reliability Class) definiert. Diese sind über den Zuverlässigkeitsindex β definiert und in Tabelle B2 (siehe Tabelle 2-1) zu finden.

Tabelle 2-1: Zuverlässigkeitsklassen und empfohlene Mindestwerte für den Zuverlässigkeitsindex β nach Tabelle B2 [14]

Zuverlässigkeitsklasse	Mindestwerte für β	
	Bezugszeitraum 1 Jahr	Bezugszeitraum 50 Jahre
RC3	5,2	4,3
RC2	4,7	3,8
RC1	4,2	3,3

Eine Bemessung nach EN 1990 mit den dort angegebenen Teilsicherheitsbeiwerten führt i.d.R zu einem Sicherheitsindex größer als 3,8 für einen Bezugszeitraum von 50 Jahren.

2.3.2 First Order Reliability Method

Sind die Ausgangsgrößen normalverteilt und werden linear kombiniert, können Sicherheitsindex und Versagenswahrscheinlichkeit wie oben beschrieben als lineare Kombination normalverteilter Größen berechnet werden. Sind die Ausgangsgrößen jedoch nicht normalverteilt oder handelt es sich um eine nichtlineare Grenzzustandsfunktion, ist die „First Order

Reliability Method“ (FORM) eine Methode um die Versagenswahrscheinlichkeit zu approximieren.

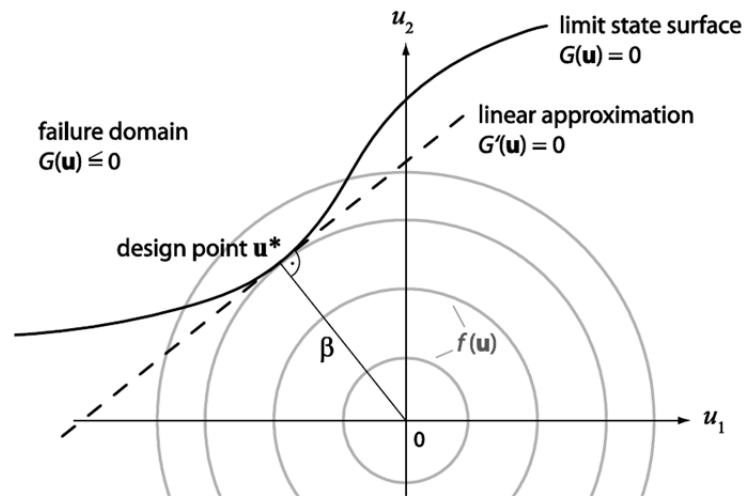


Abbildung 2-10: Bemessungspunkt (design point) und Approximation des Grenzzustandes [11]

Als erstes wird die Grenzzustandsgleichung $g(x)$ aufgestellt und in den Standard-Normalraum transformiert. Dabei werden die unkorrelierten, nicht standardnormalverteilten Variablen X in Variablen der Standard-Normalverteilung U transformiert:

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x_i) &= \Phi(u_i) \\ \Leftrightarrow x_i &= F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i)) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Der Grenzzustand im Standard-Normalraum wird durch $G(U) = 0$ beschrieben. Dieser wird als Tangente durch den „Design-Punkt“ u^* approximiert. Je nach tatsächlicher Krümmung von $G(U) = 0$ wird die Versagenswahrscheinlichkeit P_f somit unter- oder überschätzt. Bei hoher Nichtlinearität der Grenzzustandsfunktion im Standardnormalraum eignet sich FORM damit unter Umständen nicht.

Der Bemessungspunkt ist der Punkt u^* auf der Geraden $G(U) = 0$ mit dem geringsten Abstand zum Ursprung.

Ein wesentlicher Bestandteil der FORM-Analyse ist die Suche nach dem „Design-Punkt“. Dazu dient der Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HLRF) Algorithmus mit dem sogenannten Suchvektor d_i . Startwert ist der Vektor u_1 , der nach jedem Iterationsschritt durch den Suchvektor angepasst wird: $u_{i+1} = u_i + d_i$. Dieser Vorgang wird so oft wiederholt, bis $\|d_i\| = 0$. Weitere Formeln des Algorithmus sind dem nachfolgenden Beispiel zu entnehmen.

Der Sicherheitsindex β kann über den Zusammenhang $\beta = \frac{u_i^*}{\alpha_i}$ bestimmt werden. Die Versagenswahrscheinlichkeit berechnet sich zu $P_f = \Phi(-\beta)$. Die Werte α_i werden als Wichtigkeitsfaktoren bezeichnet und geben den Einfluss einzelner Parameter auf die Versagenswahrscheinlichkeit an. [11]

Zur Veranschaulichung wird an dieser Stelle FORM anhand eines Zahlenbeispiels vorgeführt. Es wird wieder ein System mit dem Widerstand R und der Einwirkung S betrachtet. Beide Größen werden als normalverteilt angenommen. Die Eingangswerte der Verteilungen sind in der folgenden Tabelle 2-2 aufgelistet.

Tabelle 2-2: Eingangswerte für das Zahlenbeispiel (FORM)

	Widerstand R	Einwirkung S
Mittelwert μ	100	90
Standardabweichung σ	10	4,5
Variationskoeffizient var	0,1	0,05

Zunächst wird die Grenzzustandsfunktion $g(R, S) = R - S$ durch Gleichung (2.30) in den Standard-Normalraum transformiert:

$$F_R(r) = \Phi\left(\frac{R - \mu_R}{\sigma_R}\right) = \Phi(u_{R,1}) \Leftrightarrow R = u_{R,1} \cdot \sigma_R + \mu_R$$

$$F_S(s) = \Phi\left(\frac{S - \mu_S}{\sigma_S}\right) = \Phi(u_{S,1}) \Leftrightarrow S = u_{S,1} \cdot \sigma_S + \mu_S$$

$$\begin{aligned} G(U) &= R - S = u_{R,1} \cdot \sigma_R + \mu_R - (u_{S,1} \cdot \sigma_S + \mu_S) \\ &= u_{R,1} \cdot 10 + 100 - (u_{S,1} \cdot 4,5 + 90) \end{aligned}$$

Danach beginnt der HLRF-Algorithmus. Der Startvektor u_1 kann beliebig gewählt werden. Oft wird der Nullvektor gewählt, wie auch in diesem Beispiel:

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_{R,1} \\ u_{S,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit diesem Vektor ergeben sich die folgenden Werte, zunächst der Wert der Grenzzustandsfunktion für die Werte des Startvektors u_1 :

$$G(u_1) = 0 \cdot \sigma_R + \mu_R - (0 \cdot \sigma_S + \mu_S) = \mu_R - \mu_S = 100 - 90 = 10$$

Die Ableitungen der Grenzzustandsfunktion nach den Variablen $u_{R,1}$ und $u_{S,1}$, auch partielle Ableitungen genannt, sowie die Länge dieses Vektors:

$$\nabla G(u_1) = \begin{pmatrix} \frac{dG(U)}{du_{R,1}} \\ \frac{dG(U)}{du_{S,1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_R \\ -\sigma_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4,5 \end{pmatrix}$$

$$\|\nabla G(u_1)\| = \sqrt{\sigma_R^2 + (-\sigma_S)^2} = \sqrt{10^2 + 4,5^2} = \sqrt{120,25}$$

Der Vektor α_1 enthält die Wichtungsfaktoren α_R und α_S . Mithilfe der berechneten Werte wird der erste Suchvektor d_1 sowie dessen Länge $\|d_1\|$ bestimmt:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha_R \\ \alpha_S \end{pmatrix} = -\frac{\nabla G(u_1)}{\|\nabla G(u_1)\|} = -\frac{1}{\sqrt{120,25}} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,91 \\ 0,41 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \left(\frac{G(u_1)}{\|\nabla G(u_1)\|} + \alpha_1^T u_1 \right) \alpha_1 - u_1 = \left(\frac{10}{\sqrt{120,25}} + 0 \right) \begin{pmatrix} -0,91 \\ 0,41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0,831 \\ 0,374 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\|d_1\| = \sqrt{(-0,831)^2 + 0,374^2} = 0,9113$$

Für den Betrag des Suchvektors $\|d_1\|$ gilt $\|d_1\| \neq 0$. Daher wird ein weiterer Iterationsschritt durchgeführt. Der Vektor u_1 wird durch den aktuellen Suchvektor angepasst und der neue Wert der Grenzzustandsfunktion wird bestimmt:

$$u_2 = u_1 + d_1 = d_1 = \begin{pmatrix} -0,831 \\ 0,374 \end{pmatrix}$$

$$G(u_2) = -0,91 \cdot 10 + 100 - (0,374 \cdot 4,5 + 90) = 0$$

Folgende Werte ändern sich gegenüber dem vorherigen Iterationsschritt nicht:

$$\nabla G(u_2) = \nabla G(u_1) = \begin{pmatrix} 10 \\ -4,5 \end{pmatrix}$$

$$\|\nabla G(u_2)\| = \|\nabla G(u_1)\| = \sqrt{120,25}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -0,91 \\ 0,41 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Werten wird der neue Suchvektor d_2 bestimmt:

$$d_2 = \left[0 + (-0,91 \quad 0,41) \begin{pmatrix} -0,831 \\ 0,374 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -0,91 \\ 0,41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,831 \\ 0,374 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|d_2\| = 0$$

Der Suchvektor d_2 besitzt nun keine Länge mehr. Damit ist der Bemessungspunkt u^* bestimmt und der HLRF-Algorithmus endet. Der Sicherheitsindex kann nun mithilfe der Vektoren α und u berechnet werden.

$$\beta = \frac{u_R^*}{\alpha_R^*} = \frac{-0,831}{-0,91} = 0,9119$$

$$\beta = \frac{u_S^*}{\alpha_S^*} = \frac{0,374}{0,41} = 0,9119$$

Aus diesem Sicherheitsindex kann dann die Versagenswahrscheinlichkeit bestimmt werden:

$$P_f = \Phi(-\beta) = \Phi(-0,9119) = 0,181$$

In diesem Beispiel wurden wie erwähnt zwei Normalverteilungen betrachtet. Dies lässt sich auch mit einer Handrechnung relativ gut lösen. Werden aber andere Verteilungen gewählt, gestaltet sich die Berechnung aufgrund der zu bildenden partiellen Ableitungen schwieriger. Daher ist der Einsatz einer Software sinnvoll.

2.3.3 Monte-Carlo-Simulationen

Wenn analytische Lösungen von Berechnungen schwer oder nicht möglich sind, kommt häufig die Monte-Carlo-Methode zum Einsatz. Diese ist ein numerisches Verfahren und besteht aus der Wiederholung der „Berechnung von zufallsbedingten Ergebnissen“ [8]. Diese werden mithilfe von Softwarelösungen durchgeführt. Die Methode basiert auf dem Gesetz der Großen Zahlen. Dieses sagt aus, dass die Varianz der Ergebnisse mit steigender Anzahl von Simulationen sinkt. Je mehr Wiederholungen also durchgeführt werden, desto genauer ist das Ergebnis. Die Anzahl wird individuell festgelegt. [8]

Die Eingangsparameter sind Zufallsvariablen einer Verteilung. Für jeden Berechnungsvorgang werden die Eingangsparameter aus der Verteilung generiert, z.B. mittels Zufallsgenerator. Mit diesen Eingangsparametern wird dann die Systemantwort berechnet. Dieser Vorgang wird n -mal wiederholt. Die Anzahl der Wiederholungen n kann beliebig gewählt werden. Die Ereignisse im Versagensbereich werden gezählt. Mit deren Anteil an den Durchläufen n kann dann die Versagenswahrscheinlichkeit des Systems abgeschätzt werden. Durch Erhöhung der Anzahl der Durchläufe kann die Schätzung verbessert werden. Nach DIN EN 1991 wird eine Versagenswahrscheinlichkeit von weniger als 10^{-4} angestrebt, also ein Versagensfall bei 10.000 Berechnungen. [13]

Im Folgenden wird auf die Analyse von Ergebnissen aus Monte-Carlo-Simulationen eingegangen. Der Erwartungswert des Monte-Carlo-Schätzwertes P_{MC} entspricht der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit:

$$E[P_{MC}] = p_F \tag{2.31}$$

Die Standardabweichung von P_{MC} wird bestimmt zu:

$$\sigma_{MC} = \frac{\sqrt{p_F - p_F^2}}{\sqrt{n}} \approx \frac{\sqrt{p_F}}{\sqrt{n}} \quad (2.32)$$

Die Genauigkeit der Schätzung kann über den Variationskoeffizienten angegeben werden:

$$\delta_{MC} = \frac{\sigma_{MC}}{E[P_{MC}]} \approx \frac{1}{\sqrt{n * p_F}} \quad (2.33)$$

Bei einer geringeren Versagenswahrscheinlichkeit p_F werden daher mehr Proben n benötigt, damit die gleiche Genauigkeit δ_{MC} erreicht werden kann.

Eine Möglichkeit die Genauigkeit von Monte-Carlo-Simulationen darzustellen sind die Konfidenzintervalle. Vorgegeben wird die Wahrscheinlichkeit p_c , mit der die tatsächliche Wahrscheinlichkeit p_f im gegebenen Konfidenzintervall enthalten ist. Dieses Intervall wird durch einen oberen und unteren Wert wie folgt berechnet:

$$p_{cl} = p_{MC} \pm k_c \cdot \frac{\sqrt{p_{MC}}}{\sqrt{n}} \quad (2.34)$$

Dabei wird angenommen, dass p_{MC} normalverteilt ist, mit Mittelwert p_f und Standardabweichung $\sigma_{MC} \cdot k_c$ stellt den Wert der Normalverteilung dar, bei dem die Überschreitungswahrscheinlichkeit erreicht ist:

$$k_c = \Phi^{-1} \left(1 - \frac{1 - p_c}{2} \right) \quad (2.35)$$

Die Konfidenzintervalle werden oft verwendet, ihre Interpretation gilt aber als nicht intuitiv. [11]

Zum besseren Verständnis findet sich die zeichnerische Darstellung in Abbildung 2-11 für ein Zahlenbeispiel, das im Folgenden beschrieben wird. Es handelt sich hierbei um ein Beispiel aus einem späteren Kapitel¹, da aus den dort durchgeführten Simulationen sowohl analytisch bestimmte als auch Ergebnisse aus Monte-Carlo-Simulationen vorliegen.

¹ In Tabelle 3-1 finden sich die Sicherheitsindizes für spröde Daniels-Systeme, in diesem Beispiel wird mit den entsprechenden Versagenswahrscheinlichkeiten gearbeitet. Für den theoretischen Wert wird das Ergebnis der Rekursionsformel verwendet.

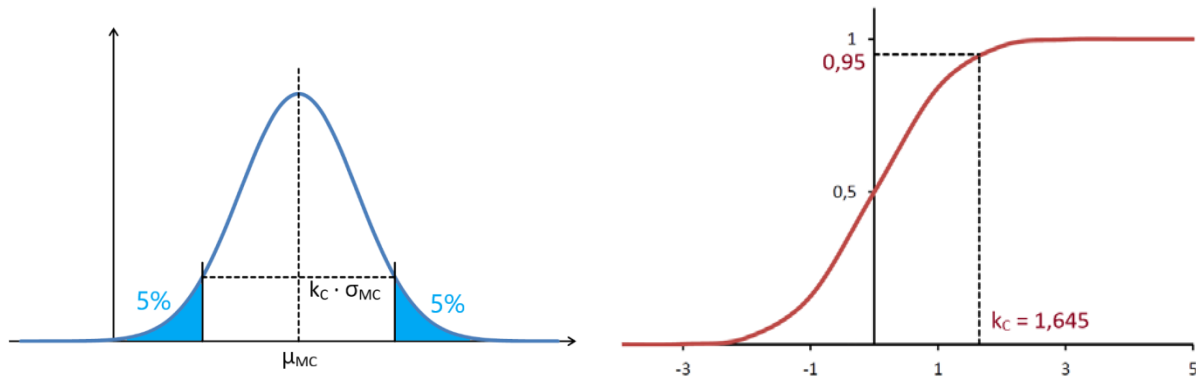


Abbildung 2-11: Darstellung der Konfidenzintervalle für das Zahlenbeispiel $p_c = 90 \%$

In der links dargestellten Verteilung von p_{MC} ist das Konfidenzintervall $[p_{cl,unten}; p_{cl,oben}]$ gekennzeichnet. Vorgegeben ist die Wahrscheinlichkeit $p_c = 90 \%$, womit im oberen und unteren Bereich jeweils 5 % der Werte der Verteilung außerhalb des Intervalls liegen. Für die vorgegebene Wahrscheinlichkeit $p_c = 90 \% = 0,9$ entspricht k_c dem Wert:

$$k_c = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1 - 0,9}{2}\right) = \Phi^{-1}(0,95) \approx 1,645$$

Für $n = 10.000 = 10^4$ Simulationen bei einer per Monte-Carlo-Simulation ermittelten Versagenswahrscheinlichkeit von $p_{MC} = 0,0252 = 25,1 \cdot 10^{-3}$ werden die Grenzen des Intervalls berechnet zu:

$$p_{cl,unten} = 1 \cdot 10^{-3} - 1,645 \cdot \frac{\sqrt{25,1 \cdot 10^{-3}}}{\sqrt{10^4}} = 22,5 \cdot 10^{-3}$$

$$p_{cl,oben} = 1 \cdot 10^{-3} + 1,645 \cdot \frac{\sqrt{25,1 \cdot 10^{-3}}}{\sqrt{10^4}} = 27,7 \cdot 10^{-3}$$

Somit liegt die tatsächliche Versagenswahrscheinlichkeit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % im Intervall $[22,5 \cdot 10^{-3}; 27,7 \cdot 10^{-3}]$. Die analytisch bestimmte Versagenswahrscheinlichkeit wurde zu $22,8 \cdot 10^{-3}$ bestimmt und liegt somit innerhalb des Intervalls.

2.3.4 Bemessung mit Teilsicherheitsbeiwerten

Laut DIN EN 1990 sind für die Bemessung Grenzzustände nachzuweisen. Unterschieden werden dabei der Grenzzustand der Tragfähigkeit (GzT) und der Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (GzG). Mithilfe von Teilsicherheits- und Kombinationsbeiwerten werden die sogenannten Bemessungswerte von Einwirkungen und Widerständen bestimmt. Mit diesen wird dann die Einhaltung der Grenzzustände überprüft. Durch die Teilsicherheitsbeiwerte sollen eventuell auftretende Abweichungen von den repräsentativen Werten berücksichtigt werden. [14]

In Abbildung 2-12 ist ein Schema der Bemessung mit Teilsicherheitsbeiwerten nach Eurocode zu sehen. Unten ist der Bemessungspunkt dargestellt. An diesem Punkt entspricht der Bemessungswert der Einwirkungen dem des Widerstandes.

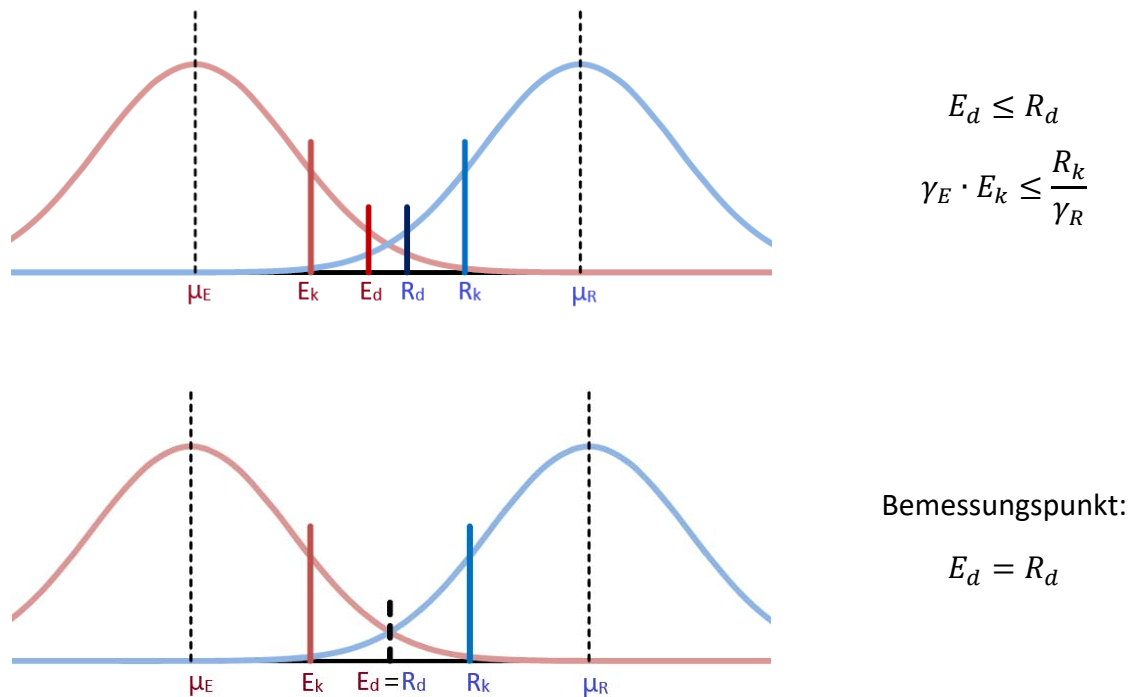


Abbildung 2-12: Bemessungsprinzip mit Teilsicherheitsbeiwerten

Die Bemessungswerte der Einwirkungen F_d werden mithilfe eines Teilsicherheitsbeiwertes γ_f und ggf. mithilfe von Kombinationswerten ψ bestimmt:

$$F_d = \gamma_f \cdot F_{rep} \quad (2.36)$$

mit $F_{rep} = \psi \cdot F_k$

F_k ist dabei der charakteristische Wert der Einwirkung. Die Kombinationsbeiwerte ψ_0, ψ_1, ψ_2 sind für die Kombination verschiedener Einwirkungen vorgesehen. Sie mindern die Werte ab, da einige Auswirkungen von Einwirkungen nicht gleichzeitig auftreten können. Wird nur eine Einwirkung berücksichtigt gilt $\psi = 1,0$ und somit:

$$F_d = \gamma_f \cdot F_k \quad (2.37)$$

Die Auswirkungen von Einwirkungen E_d werden aus den Einwirkungen F_d mit einem zusätzlichen Teilsicherheitsbeiwert γ_{sd} bestimmt. Die beiden Teilsicherheitsbeiwerte γ_f und γ_{sd} werden zusammengefasst zu γ_F .

$$E_d = \gamma_{sd} \cdot \gamma_f \cdot F_k = \gamma_F \cdot F_k \quad (2.38)$$

Auch der Bemessungswert des Widerstandes wird mithilfe eines Teilsicherheitsbeiwertes berechnet:

$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_M} \quad (2.39)$$

R_k ist dabei der charakteristische Wert des Widerstandes des betrachteten Baustoffs bzw. des Bauproduktes. Er entspricht i.d.R. einem festgelegten Quantilwert, dem 5 %- bzw. 95 %-Quantil.

Für die Teilsicherheitsbeiwerte gelten für die beiden Grenzzustände zum Teil andere Werte. Die Teilsicherheitsbeiwerte sind für den GzT in EN 1992 bis 1999 festgelegt. Für den GzG sind die Werte zu 1,0 zu setzen, wenn nicht in EN 1992 bis 1999 andere Werte festgelegt sind.
[14]

3 Daniels-Systeme

Das Originaldokument von H. E. Daniels [15] wurde im Jahr 1945 veröffentlicht und befasst sich mit statistischen Überlegungen zur Festigkeit von Fadenbündeln. Das von ihm entwickelte System, siehe Abbildung 3-1, wurde nach ihm als „Daniels-System“ benannt.

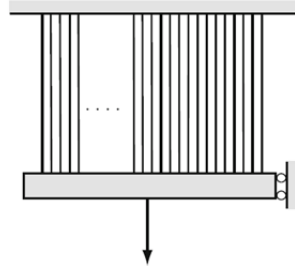


Abbildung 3-1: Prinzipieller Aufbau eines Daniels-Systems [16]

In diesem Kapitel werden sowohl dieses ursprüngliche Daniels-System als auch verschiedene Erweiterungen vorgestellt, welche das Materialverhalten sowie die Lastverteilung betreffen. Außerdem werden sowohl verschiedene theoretische als auch numerische Ansätze vorgestellt, um die Tragfähigkeit und Systemzuverlässigkeit zu bestimmen.

3.1 Ideal-spröde Systeme

Zunächst wird das klassische Daniels-System mit dessen Annahmen betrachtet. Hierfür wird eine quasi-statische Last, ideal-elastisch-sprödes Materialverhalten sowie eine ideale Lastverteilung zwischen den nicht versagten Elementen vorausgesetzt. Die Widerstände sind zudem unabhängig verteilt und weisen einen konstanten Elastizitätsmodul auf. [17]

3.1.1 Theorie

Neben der ursprünglichen Lösung von Daniels gibt es verschiedene theoretische Ansätze die Versagenswahrscheinlichkeit bzw. den Sicherheitsindex zu bestimmen. Diese sollen im Folgenden vorgestellt werden.

3.1.1.1 Nach Daniels

Das oben erwähnte Originaldokument von H. E. Daniels [15] enthält die mathematische Herleitung für die Versagenswahrscheinlichkeit eines mit der Last s belastetes System. Das asymptotische Ergebnis lautet wie folgt. [17]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(R_n \leq s) = \Phi \left(\frac{s - E_n}{D_n} \right) \quad (3.1)$$

Mit den dazugehörigen Werten des Erwartungswertes E_n und der Standardabweichung D_n der Tragfähigkeit des Systems:

$$E_n = n \cdot x_0 \cdot (1 - F_X(x_0)) + C_n \quad (3.2)$$

$$D_n = x_0 \cdot [n \cdot F_X(x_0) \cdot (1 - F_X(x_0))]^{1/2} \quad (3.3)$$

Wobei x_0 die Stelle des Maximums von $x \cdot (1 - F_X(x))$ ist. $F_X(x)$ entspricht dabei der Verteilungsfunktion der Festigkeit der einzelnen Stäbe. Die in E_n enthaltene Korrekturfunktion C_n berechnet sich nach Daniels zu:

$$C_n = 0,966 \cdot n^{1/3} \cdot a \quad (3.4)$$

$$\text{mit } a^3 = \frac{f_X^2(x_0) \cdot x_0^4}{2 \cdot f_X(x_0) + x_0 \cdot f_X'(x_0)} \quad (3.5)$$

In Abbildung 3-2 sind die Verläufe von E_n und D_n über die Anzahl n der Stäbe dargestellt. Während der Erwartungswert annähernd linear mit n steigt, ist erkennbar, dass die Steigung der Standardabweichung immer geringer wird.

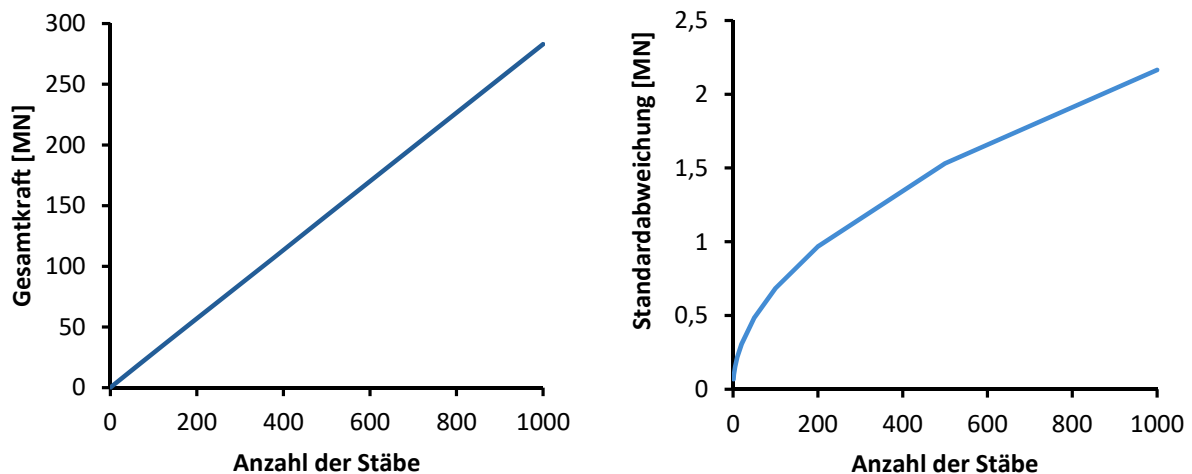


Abbildung 3-2: Gesamtkraft E_n und Standardabweichung D_n über Anzahl der Stäbe

In Abbildung 3-3 sind Erwartungswert und Standardabweichung bezogen auf die Anzahl der Stäbe dargestellt. Dort sind nun die wesentlichen Phänomene des Daniels-Systems zu erkennen. Mit steigender Anzahl an Stäben sinkt die effektive mittlere Bruchspannung, aber auch die Standardabweichung sinkt.

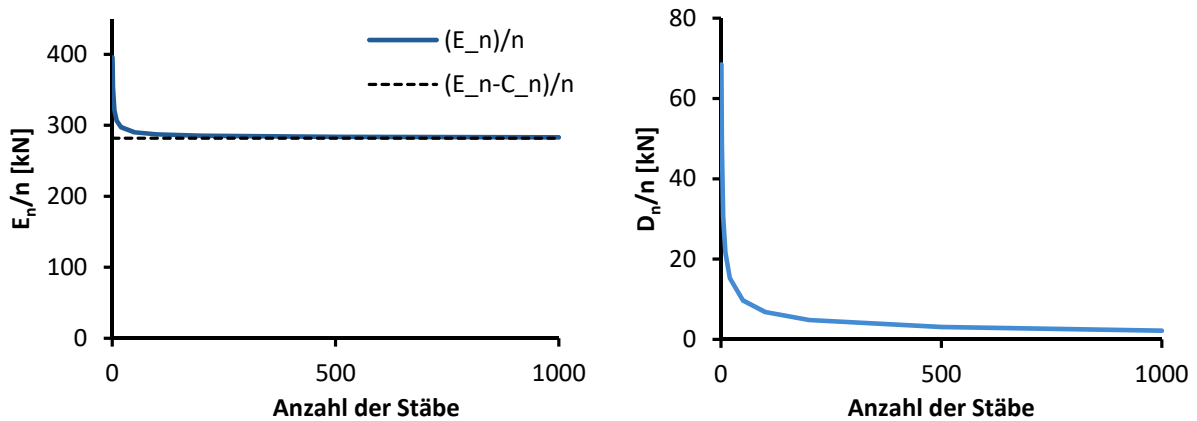


Abbildung 3-3: links: Mittlere Kraft je Stab sowie der Wert ohne Korrekturfunktion; rechts: Standardabweichung bezogen auf die Anzahl der Stäbe (D_n/n)

Für große n ist die Korrekturfunktion C_n verschwindend gering und der Wert der mittleren Bruchspannung nähert sich damit dem Wert $\frac{E_n - C_n}{n}$ an. Aber auch die Standardabweichung bezogen auf die Anzahl der Stäbe wird immer kleiner. Damit geht dann auch der Variationskoeffizient $var = \frac{\sigma}{\mu}$ gegen Null, siehe Abbildung 3-4.

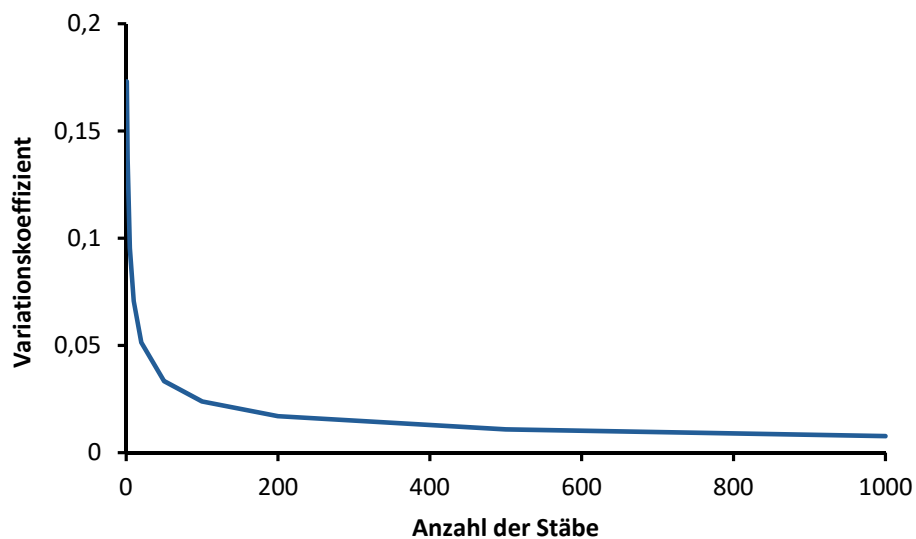


Abbildung 3-4: Verlauf des Variationskoeffizienten über Anzahl der Stäbe

In der folgenden Abbildung 3-5 sind für $n = 1$ und $n = 50$ die jeweilige Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu = \frac{E_n}{n}$ und der Standardabweichung $\sigma = \frac{D_n}{n}$ für ein Zahlenbeispiel grafisch dargestellt. Der gekennzeichnete Wert der mittleren Bruchspannung von $190,27 \text{ N/mm}^2$ ist diesem Zahlenbeispiel zugehörig und wird im weiteren Verlauf der Arbeit erläutert.

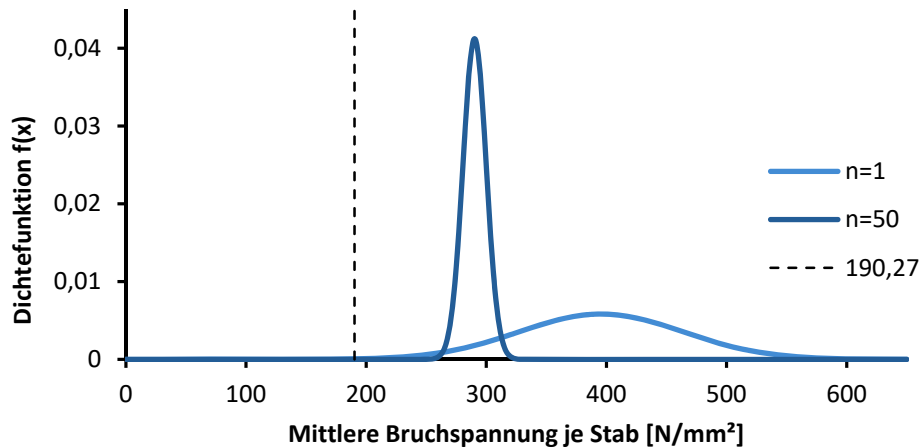


Abbildung 3-5: Dichtefunktionen der Verteilung der Bruchspannung für $n = 1$ und $n = 50$

In der Abbildung lässt sich gut erkennen, dass die mittlere Bruchspannung und gleichzeitig auch die Standardabweichung abnehmen. Die Glockenkurve der Normalverteilung verschiebt sich nach links, wird aber gleichzeitig schmaler. Für eine gleichbleibende Last $\frac{s}{n}$ je Stab nimmt der Sicherheitsindex β somit immer weiter zu. Zum einen kann dies rechnerisch gezeigt werden.

Für den Fall $n = 1$ werden Mittelwert und Standardabweichung wie folgt bestimmt:

$$\mu_{n=1} = \frac{E_n}{n} = 395,59$$

$$\sigma_{n=1} = \frac{D_n}{n} = 68,44$$

Mit einem angenommenen Sicherheitsindex von $\beta_1 = 3$ ergibt sich für die Last je Stab:

$$\frac{s}{n} = \mu - \beta_1 \cdot \sigma = 395,59 - 3 \cdot 68,44 = 190,27$$

Mittelwert und Standardabweichung werden für $n = 50$ analog berechnet:

$$\mu_{n=50} = \frac{E_n}{n} = 290,24$$

$$\sigma_{n=50} = \frac{D_n}{n} = 9,68$$

Bleibt die Last $\frac{s}{n}$ gegenüber dem Fall $n = 1$ konstant, verändert sich der Sicherheitsindex:

$$\frac{s}{n} = \mu - \beta_{neu} \cdot \sigma = 290,24 - \beta_{neu} \cdot 9,68 = 190,27$$

$$\Rightarrow \beta_{neu} = 10,33$$

Zum anderen kann die Zunahme des Sicherheitsindexes auch über die in Abbildung 3-5 dargestellte Verteilungsfunktion veranschaulicht werden. Wird die Last $\frac{S}{n}$ deterministisch angenommen, wird die Fläche, die den Versagensbereich darstellt, immer kleiner. Damit nimmt die Versagenswahrscheinlichkeit immer weiter ab.

In Abbildung 3-6 findet sich eine Vergrößerung des Bereiches 180-200 N/mm². Hier lässt sich besser erkennen, dass der Versagensbereich kleiner wird. Während dieser für $n = 1$ noch erkennbar ist, scheint für $n = 50$ der Wert schon bei Null zu liegen. Zum Ablesen der genauen Werte wäre eine andere Skalierung notwendig.

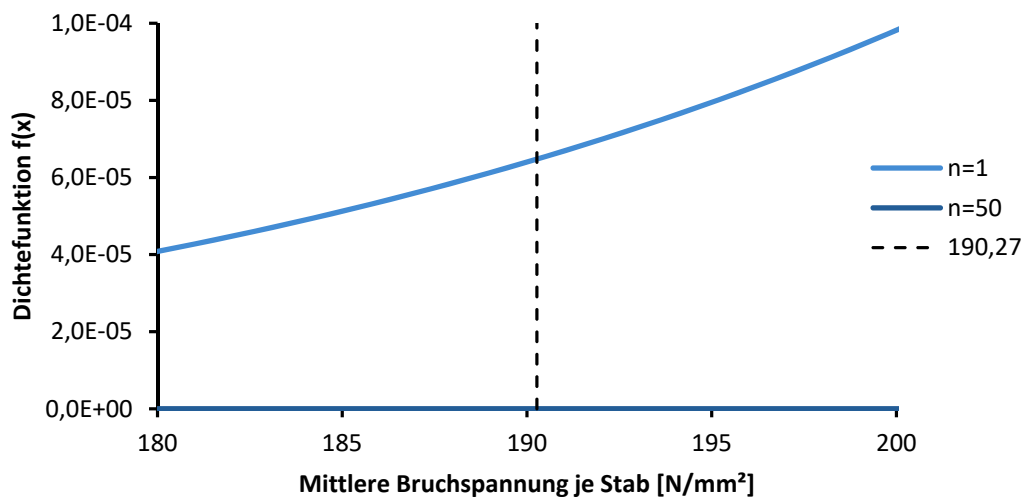


Abbildung 3-6: Vergrößerung für den Bereich 180 - 200 aus Abbildung 3-5

3.1.1.2 Rekursionsformel

Daniels entwickelte mehrere analytische Lösungen. Aus einem dieser Lösungsansätze von Daniels wurde die folgende Rekursionsformel entwickelt. [18]

$$Pr(F_{Sys,n}) = F_{R_{Sys,n}}(s) = (-1)^{n+1} \cdot F_R^n\left(\frac{s}{n}\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \left[(-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot F_R^i\left(\frac{s}{n}\right) \cdot F_{R_{Sys,n-i}}(s) \right] \quad (3.6)$$

Bis zu einer begrenzten Anzahl ist diese Lösung umsetzbar. Da es sich um eine rekursive Formel handelt, steigt der Aufwand mit zunehmendem n . Die numerische Lösung mit MATLAB ist bis etwa $n = 50$ umsetzbar. Für größere n werden die Zwischenergebnisse so groß ($> 10^{15}$), dass die numerische Lösung mithilfe der Software nicht mehr möglich ist.

3.1.1.3 Hyperwürfel

Ein weiteres Konzept ist das der Hyperwürfel [16]. Der Ablauf dieser Berechnung wird anhand des zweidimensionalen Falls ($n = 2$) erklärt, funktioniert für größere n aber analog. Das Konzept ist auf höhere Dimensionen, also größere n , erweiterbar. Begrenzt wird dies jedoch durch die sehr hohen theoretisch erforderlichen Rechenkapazitäten. Diese Grenze konnte für $n = 6$ ausgemacht werden.

Es wird ein System mit $n = 2$ betrachtet, das mit der Last s belastet ist. Die Last ist gleichmäßig auf die Stäbe 1 und 2 aufgeteilt. Diesen beiden Stäben werden die Widerstände R_1 und R_2 zugeordnet. In der Abbildung 3-7 ist links dieses System dargestellt, rechts der Versagensbereich nach dem Konzept der Hyperwürfel.

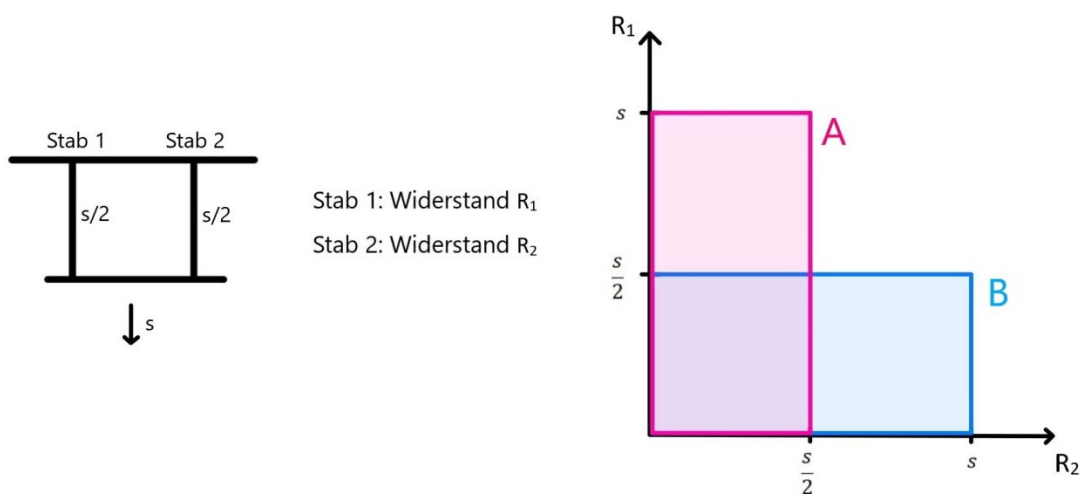


Abbildung 3-7: links: Betrachtetes System; rechts: Versagensbereich (schraffiert)

Die eingezeichneten Bereiche A und B des Versagensbereiches repräsentieren zwei mögliche Versagensreihenfolgen, die zum Versagen des Systems führen. Im Fall A ist der Widerstand R_2 des Stabes 2 für eine Belastung von $\frac{s}{2}$ nicht ausreichend, so dass dieser versagt und die Systembelastung s vom nicht versagten Stab 1 aufgenommen werden muss. Kann dieser der Belastung jedoch nicht standhalten, versagt das System. Dieser Bereich der Versagensreihenfolge lässt sich durch

$$R_2 < \frac{s}{2} \cap R_1 < s$$

beschreiben. Analog dazu gilt für Bereich B:

$$R_1 < \frac{s}{2} \cap R_2 < s$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit berechnet sich aus der Fläche dieses Versagensbereichs. Beide der aufgeführten Bereiche beinhalten jedoch den Bereich $R_1 < \frac{s}{2} \cap R_2 < \frac{s}{2}$, sodass dieser bei der Flächenberechnung zweifach berücksichtigt würde.

Zur Veranschaulichung dieser Flächenberechnung wird der Versagensbereich daher in die folgenden drei Bereiche aufgeteilt. In Abbildung 3-7 sind diese als gleich große Quadrate zu erkennen.

$$R_1 < \frac{s}{2} \cap R_2 < \frac{s}{2}$$

$$\frac{s}{2} < R_1 < s \cap R_2 < \frac{s}{2}$$

$$R_1 < \frac{s}{2} \cap \frac{s}{2} < R_2 < s$$

Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit ergibt sich anhand dieser Aufteilung und den Verteilungsfunktionen $F_{R,i}$ der Widerstände zu:

$$\begin{aligned} P_f &= \left(F_{R1} \left(\frac{s}{2} \right) - F_{R1}(0) \right) \cdot \left(F_{R2} \left(\frac{s}{2} \right) - F_{R2}(0) \right) \\ &+ \left(F_{R1}(s) - F_{R1} \left(\frac{s}{2} \right) \right) \cdot \left(F_{R2} \left(\frac{s}{2} \right) - F_{R2}(0) \right) \\ &+ \left(F_{R1} \left(\frac{s}{2} \right) - F_{R1}(0) \right) \cdot \left(F_{R2}(s) - F_{R2} \left(\frac{s}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

In Fällen höherer Dimensionen wird die Versagenswahrscheinlichkeit aus dem Volumen des Versagensbereichs bestimmt. Für den dreidimensionalen Fall ($n = 3$) ist der Versagensbereich in Abbildung 3-8 dargestellt.

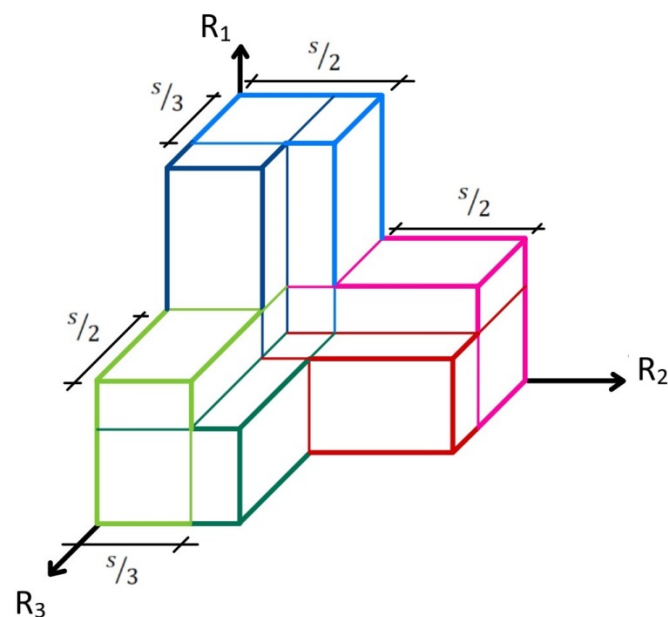


Abbildung 3-8: Darstellung des Versagensbereichs für $n=3$ im Fall einer gleicheren Lastverteilung

Mit steigender Anzahl n an Stäben ergeben sich mehr mögliche Versagensreihenfolgen. Deren Anzahl lässt sich über $n!$ bestimmen. Somit besteht der dargestellte Versagensbereich für den dreidimensionalen Fall aus $3! = 6$ Quadern.

Die numerische Umsetzung erfolgt mit der Software MATLAB. Der Gesamtbereich wird in einzelne Elemente unterteilt. Die Einzelwahrscheinlichkeit jedes dieser Elemente wird bestimmt. Anschließend wird eine Abfrage durchgeführt, ob sich das jeweilige Element im Versagensbereich befindet. Alle Einzelwahrscheinlichkeiten, auf die diese Bedingung zutrifft, werden aufaddiert und man erhält so die Systemversagenswahrscheinlichkeit.

3.1.2 Numerische Untersuchungen

Bei der Vorstellung der theoretischen Ansätze wurde auf die Entwicklung der mittleren Bruchfestigkeit und der Versagenswahrscheinlichkeit mit steigender Anzahl an Drähten eingegangen. Daher werden auch die Ergebnisse der Simulationen hinsichtlich beider Aspekte untersucht.

Die Simulationen werden mit der Software MATLAB [19] dehnungsgesteuert durchgeführt. Zunächst wird jedem Stab eine Bruchspannung, verteilt mit μ und σ , zugewiesen. Das System, bestehend aus n Stäben, wird dehnungsgesteuert bis zum Bruch belastet und die maximale Kraft wird aufgezeichnet. Die Bruchspannung wird mit der definierten Querschnittsfläche der Einzelstäbe $A = 1$ ermittelt. Diese Berechnung wird wiederholt und die Verteilung der Ergebnisse und deren Parameter bestimmt.

Als Ausgangsverteilung wird sowohl eine Normalverteilung als auch eine zweiparametrische Weibullverteilung gewählt. Die Ergebnisse weichen in ihrem prinzipiellen Verlauf kaum voneinander ab. Deshalb werden im Folgenden die Ergebnisse mit der Normalverteilung als Ausgangsverteilung betrachtet.

3.1.2.1 Bestimmung der mittleren Bruchspannung

Zunächst wurde der Einfluss der Anzahl der Wiederholungen getestet. Es wurden 500 bis 10.000 Simulationen durchgeführt. Die Anzahl hat nur einen sehr geringen Einfluss auf die Ergebnisse, siehe Abbildung 3-9. Dort ist der Verlauf des Variationskoeffizienten der Ergebnisverteilung für bis zu 100 Stäbe für verschiedene Anzahl an Durchläufen aufgezeichnet. Somit kann eine geringe Anzahl von Simulationen bereits als ausreichend angesehen werden.

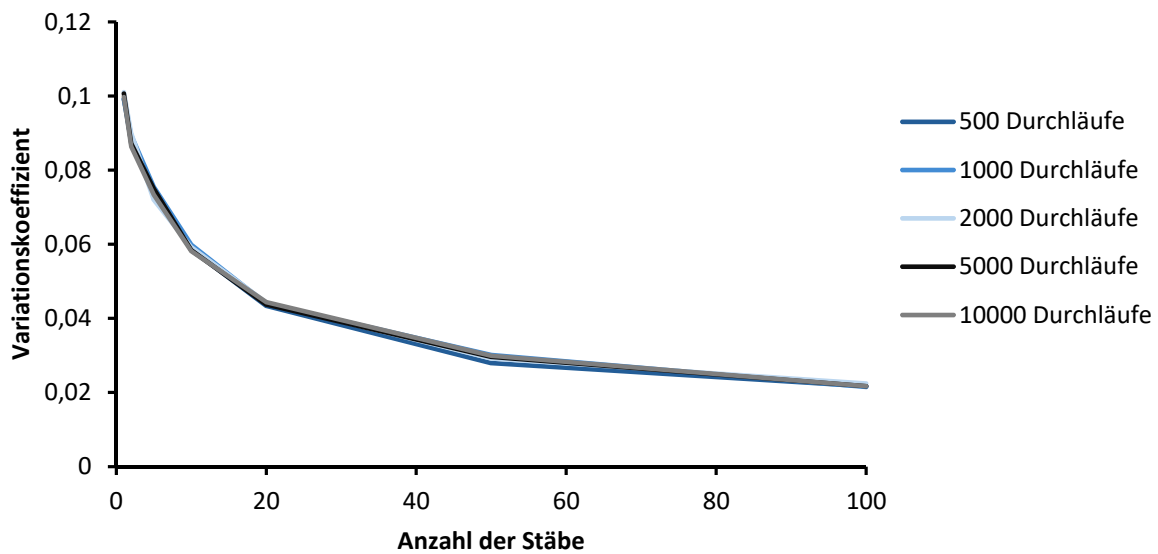


Abbildung 3-9: Variationskoeffizient der Ergebnisverteilung über Anzahl der Stäbe für verschiedene Anzahlen an Simulationsdurchläufen (Ausgangverteilung: $var = 0,1$)

Der Variationskoeffizient der Ergebnisverteilung entspricht für $n = 1$ immer dem der Ausgangsverteilung. Er nimmt mit steigender Anzahl der Stäbe ab und nähert sich dem Wert Null, siehe Abbildung 3-9. Besonders stark ist dieser Abfall im Bereich mit einer geringen Anzahl an Stäben, sodass der Daniels-Effekt bereits bei Systemen mit nur wenigen Komponenten deutlich wird.

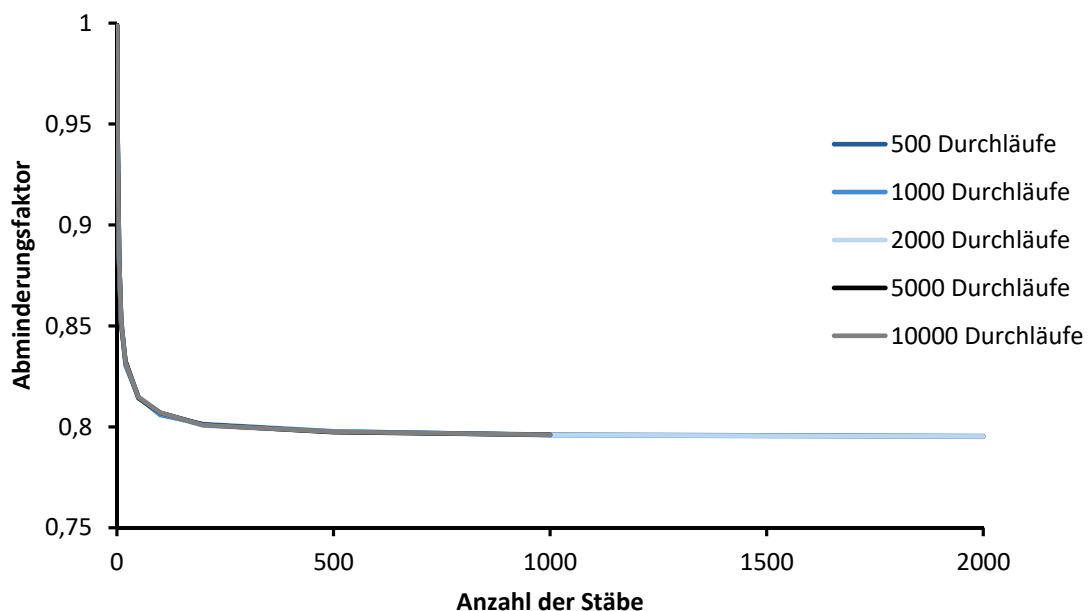


Abbildung 3-10: Abminderungsfaktor κ für die mittlere Spannung über Anzahl der Stäbe für eine verschiedene Anzahl an Simulationsdurchläufen

Die mittlere Spannung je Stab nimmt mit steigender Anzahl an Stäben ebenfalls ab, nähert sich aber immer weiter einem Grenzwert an, siehe Abbildung 3-10. Dort ist der Verlauf des

Abminderungsfaktors κ über die Anzahl der Stäbe abgebildet. Dieser Abminderungsfaktor κ beschreibt das Verhältnis zwischen der mittleren Festigkeit der Stäbe in der Simulation und dem Mittelwert der Verteilung der Bruchspannung f_u .

3.1.2.2 Bestimmung von Sicherheitsindex und Versagenswahrscheinlichkeit

Die bisher beschriebenen Ergebnisse beziehen sich auf die Ergebnisse der mittleren Spannung oder der Gesamtkraft, die vom System aufgenommen wird. Aus den Ergebnissen kann jedoch auch die Systemversagenswahrscheinlichkeit bestimmt werden. Dies kann auf zwei Arten geschehen.

Eine Möglichkeit besteht darin, zunächst die Parameter μ_R und σ_R der Ergebnisverteilung zu bestimmen. Der Sicherheitsindex β kann im Anschluss als Abstand der Last s zum Mittelwert μ_R bestimmt werden.

$$\beta = -\frac{s - \mu_R}{\sigma_R} \quad (3.7)$$

Aus diesem kann dann wiederum die Versagenswahrscheinlichkeit P_f berechnet werden.

Bei der zweiten Variante wird die Versagenswahrscheinlichkeit P_f als Anteil der Versagensereignisse an der Gesamtanzahl der Ergebnisse bestimmt. Der Sicherheitsindex kann über die Standardnormalverteilung aus der Versagenswahrscheinlichkeit bestimmt werden. Die Ergebnisse für den Sicherheitsindex sind für beide Berechnungsvarianten zwecks Vergleichs mit den theoretischen Werten im folgenden Abschnitt 3.1.3 aufgeführt.

Im Anhang, Tabelle A2, finden sich die Ergebnisse der Simulationen mit 1.000 und 10.000 Durchläufen. Dort ist erkennbar, dass die Ergebnisse, die über den Anteil der Versagensereignisse bestimmt wurden, deutlich stärker von der Anzahl der Simulationen abhängig sind als die über die Ergebnisverteilung bestimmten. Es wird dort auch deutlich, dass für die Bestimmung über die Ergebnisverteilung eine geringere Anzahl an Simulationen ausreichend ist. Dies wurde bereits bei den numerischen Untersuchungen zur Bestimmung der mittleren Bruchspannung deutlich. Weitere Erläuterungen zur Ungenauigkeit von Monte-Carlo-Simulationen finden sich in Kapitel 4.2.

3.1.3 Vergleich von Theorie und Numerik

Für alle vorgestellten Konzepte zur Berechnung des Sicherheitsindex finden sich in Tabelle 3-1 die Ergebnisse für verschiedene Anzahlen an Stäben. Die Werte für die Hyperwürfel-Methode sind aufgrund der begrenzten Rechenkapazität nur bis $n = 5$ angegeben.

Tabelle 3-1: Sicherheitsindex β für spröde Daniels-Systeme (mit $\alpha = 2$; $var = 0,2$)

n	Daniels	Rekursion	Hyperwürfel	Numerik (10.000 Durchläufe; über Verteilung ²)	Numerik (10.000 Durchläufe; über Anteil ³)
1	1,72	2,00	2,00	1,97	1,96
3	1,68	1,82	1,82	1,74	1,79
5	1,72	1,87	1,87	1,79	1,85
10	1,86	2,04	-	1,95	2,01
15	1,99	2,19	-	2,11	2,21

Der erwähnte Faktor α entspricht dem Wert des Sicherheitsindex β für einen Stab. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird dieser auch als β_1 bezeichnet.

Es ist zu erkennen, dass die Werte aus der Rekursionsformel und den Hyperwürfeln übereinstimmen. Die Werte nach Daniels weichen etwas davon ab, liegen jedoch unter denen der anderen theoretischen Lösungen. Eine mögliche Erklärung ist, dass Daniels' Ergebnisse asymptotische Ergebnisse und somit für kleine n nicht exakt sind.

In dieser Tabelle ist zudem ein weiteres Merkmal der spröden Daniels-Systeme erkennbar. Der Sicherheitsindex sinkt zunächst, bevor er mit weiter steigendem n zunimmt. Bei beispielsweise zwei Stäben versagen beide Stäbe fast gleichzeitig. Nach Ausfall des ersten Stabes kann der zweite nicht die Last aus beiden Stäben aufnehmen und versagt ebenfalls. Sind mehrere Stäbe vorhanden, ist die Last, die bei Ausfällen eines Stabes auf die übrigen verteilt wird, nicht so hoch, dass sie direkt zum Versagen der anderen Stäbe führt. Dieser Effekt ist jedoch abhängig vom gewählten Variationskoeffizienten var sowie dem gewählten Sicherheitsindex α für einen einzelnen Stab, siehe Abbildung 3-11.

² Die Parameter μ_R und σ_R der Ergebnisverteilung werden ermittelt, um im Anschluss den Sicherheitsindex β als Abstand der Last s zum Mittelwert μ_R zu bestimmen.

³ Die Versagenswahrscheinlichkeit P_f wird als Anteil der Versagensereignisse an der Gesamtanzahl der Ergebnisse bestimmt, um aus dieser den Sicherheitsindex über die Standardnormalverteilung zu bestimmen.

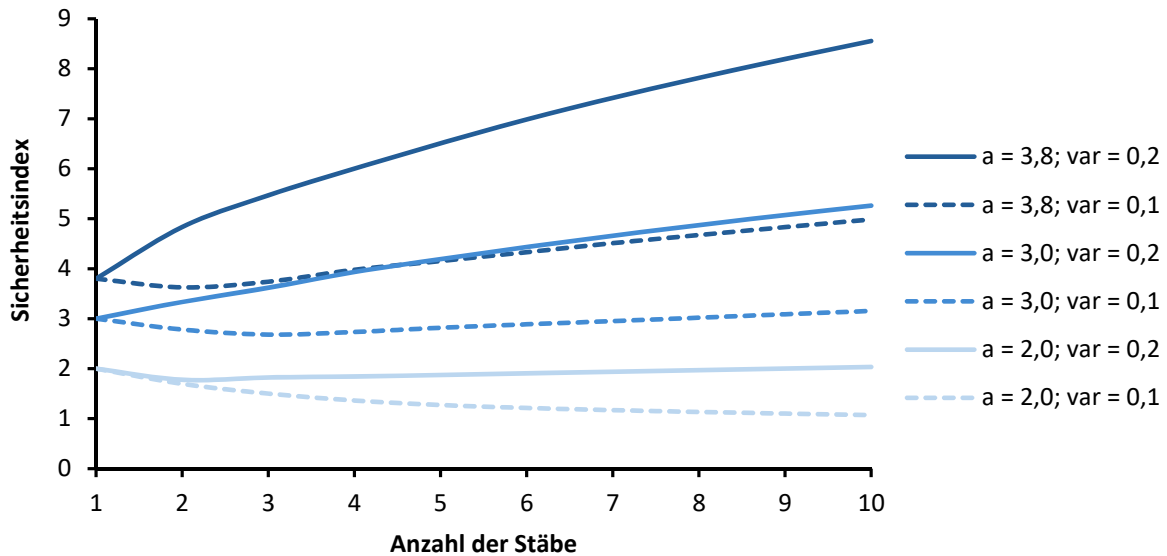


Abbildung 3-11: Sicherheitsindex spröder Daniels-Systeme für verschiedene a und var über Anzahl der Stäbe

Für den in der Literatur häufig angeführten Wert $a = 2$ folgt auf den anfänglichen Abfall des Sicherheitsindex eine leichte Steigerung. Werden jedoch für das Bauwesen relevantere Sicherheitsindizes betrachtet, wie beispielsweise $a = 3,8$, steigt der Sicherheitsindex bereits für $n = 2$. Bei geringen Variationskoeffizienten, wie bspw. $var = 0,1$ in diesem Beispiel, ist ein weniger stark ansteigender Sicherheitsindex zu beobachten. In diesen Fällen nähert sich der Verlauf dem konstanten Sicherheitsindex eines Systems mit deterministisch festgelegten Parametern.

Mit beiden Varianten aus den Simulationsergebnissen einen Sicherheitsindex zu bestimmen, erhält man unterschiedliche Ergebnisse. Das kann zum einen an der Anzahl der durchgeführten Simulationen liegen. Wie oben bereits erwähnt ist für die Bestimmung von β und P_f eine größere Anzahl an Simulationen notwendig. Zum anderen weisen die Ergebnisverteilungen eine gewisse Schiefe und Kurtosis abweichend zur Normalverteilung mit μ und σ auf, die in der ersten Berechnungsvariante nicht berücksichtigt werden. Auch Fehler in der Schätzung von Mittelwert und Standardabweichung führen zu anderen Ergebnissen.

3.2 Ideal-spröde Systeme mit ungleicher Lastverteilung

Bisher wurde immer eine gleiche Lastverteilung sowie gleichmäßige Lastumverteilung zwischen den Stäben der Daniels-Systeme angenommen. Möglich ist aber auch die Berücksichtigung einer ungleichen Lastverteilung. Zum einen kann die Verteilung der Last ungleich, aber proportional zur Steifigkeit der nicht versagten Stäbe angesetzt werden. Zum anderen kann die Lastverteilung auch nicht proportional dazu angenommen werden.

3.2.1 Theorie

Durch das im vorherigen Kapitel beschriebene Konzept der Hyperwürfel kann die Versagenswahrscheinlichkeit auch für eine ungleiche Verteilung der Last berechnet werden. Ist die Last proportional zur Steifigkeit der verbliebenen Stäbe verteilt, ergeben sich ähnliche Ergebnisse für die Systemversagenswahrscheinlichkeit wie für ein System mit gleichmäßiger Lastverteilung. [18]

Eine solche Lastverteilung kann beispielsweise durch unterschiedliche Querschnittsflächen der einzelnen Stäbe hervorgerufen werden, siehe Abbildung 3-12 (links). Bei den numerischen Voruntersuchungen zu den spröden Daniels-Systemen, bei denen neben der Bruchspannung ebenfalls die Querschnittsfläche variiert wurde, konnten bereits ähnliche Ergebnisse wie für das klassische Daniels-System beobachtet werden. Diese Ergebnisse sind mit weiteren numerischen Untersuchungen zur Lastverteilung in Abschnitt 3.2.2 aufgeführt.

Im Folgenden werden daher Systeme betrachtet, bei denen die Last nicht proportional zur Steifigkeit der verbliebenen Stäbe verteilt ist. Ein mögliches System dieser ungleichen Lastverteilung ist in Abbildung 3-12 (rechts) dargestellt.

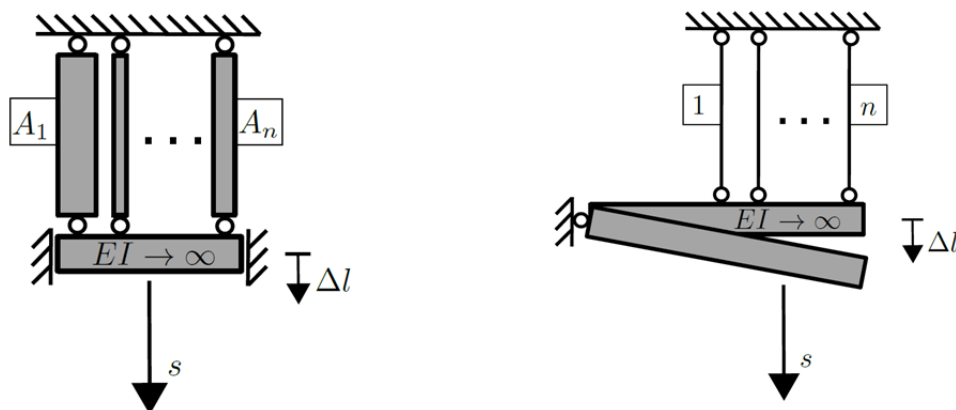


Abbildung 3-12: Daniels-Systeme mit ungleicher Lastverteilung, proportional (links) und nicht proportional (rechts) zur Steifigkeit der nicht versagten Stäbe [18]

Anhand des vorgestellten Konzeptes der Hyperwürfel (siehe Kapitel 3.1.1.3) wird die Versagenswahrscheinlichkeit berechnet. Für den zwei- und dreidimensionalen Fall kann der Versagensbereich bildlich dargestellt werden, siehe Abbildung 3-13.

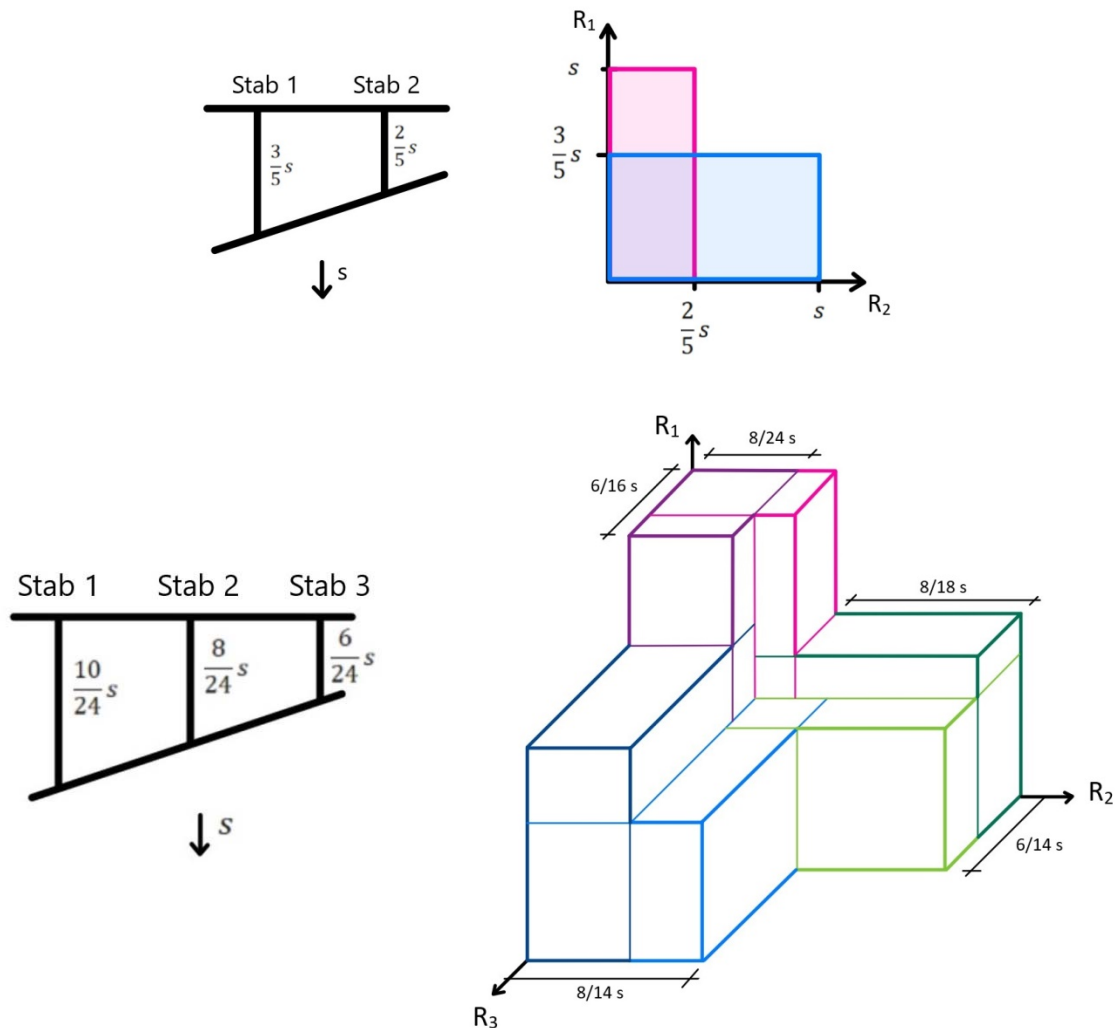


Abbildung 3-13: Darstellung des verwendeten Systems und des Versagensbereiches für $n = 2$ und $n = 3$ im Fall einer ungleichen Lastverteilung

Aufgrund der auf die Stäbe ungleich verteilten Belastung kommt es zu unterschiedlichen Grenzbedingungen für ein Versagen der Widerstände. Der Versagensbereich für den zwei-dimensionalen Fall lässt sich analog zu Abschnitt 3.1.1.3 beschreiben:

$$R_1 < \frac{3}{5}s \cap R_2 < s$$

$$R_2 < \frac{2}{5}s \cap R_1 < s$$

Diese unterschiedlichen Grenzbedingungen, in diesem Beispiel $\frac{3}{5}s$ und $\frac{2}{5}s$, führen in der zeichnerischen Darstellung zu unterschiedlichen Abmessungen der Rechtecke bzw. Quader. Im Fall einer gleichverteilten Last sind diese Abmessungen für alle Teilbereiche identisch auf, siehe Abbildung 3-8.

3.2.2 Numerische Untersuchungen

Zunächst wird der Fall betrachtet, bei dem die Last proportional zur Steifigkeit der verbliebenen Stäbe verteilt ist.

Bei den bisherigen Untersuchungen wurde nur die Bruchspannung f_u als normalverteilt angenommen. Der E-Modul E und die Querschnittsfläche A waren feste Werte, die Last wurde dehnungsgesteuert aufgebracht. Damit war die Spannung in den einzelnen Stäben immer gleich, lediglich das Abbruchkriterium f_u war für jeden Stab ein anderes. Wird die Last proportional auf die verbliebenen Stäbe aufgeteilt, wird die Querschnittsfläche A als veränderlich angenommen, in diesem Fall als normalverteilt. Die Bruchspannung f_u wird weiterhin als normalverteilt und der E-Modul als konstant angenommen. Für beide beschriebenen Fälle wurden Simulationen durchgeführt. Deren Ergebnisse für den Sicherheitsindex β sind in Abbildung 3-14 zu sehen.

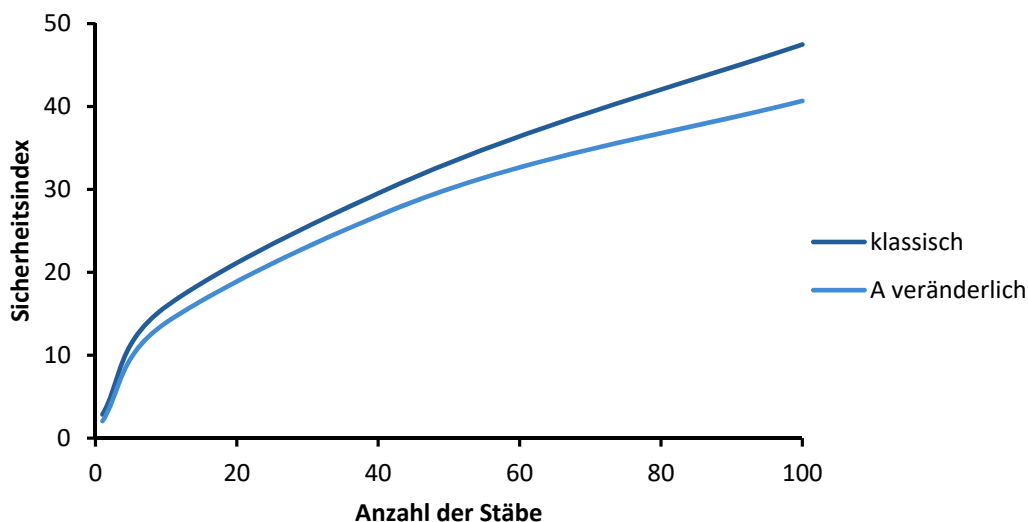


Abbildung 3-14: Ergebnisse des Sicherheitsindex β für Verteilungen von f_y („klassisch“) sowie für von f_y und A („A veränderlich“) über Anzahl der Stäbe (1.000 Durchläufe)

Beide Kurven weisen einen ähnlichen Verlauf auf, insbesondere für eine geringe Anzahl an Stäben liegen die Werte sehr nah beieinander. Die weiter auseinander liegenden Werte für eine größere Anzahl an Stäben kann durch die geringe Anzahl an Durchläufen erklärt werden. Bereits in Kapitel 3.1 konnte gezeigt werden, dass die Ergebnisse für den Sicherheitsindex sensitiv gegenüber der Anzahl an durchgeführten Simulationen ist. Die Aussage nach [18], dass für ein System mit einer ungleichen Lastverteilung proportional zur Steifigkeit der verbliebenen Stäbe ähnliche Ergebnisse für die Systemversagenswahrscheinlichkeit wie für ein System mit gleichmäßiger Lastverteilung zu erwarten sind, kann damit bestätigt werden.

Weiterhin wird eine Lastverteilung nicht proportional zur Steifigkeit der verbliebenen Stäbe untersucht. Für eine Lastverteilung wie sie in Abbildung 3-12 zu sehen ist, wird mit MATLAB zur Validierung des Systems eine dehnungsgesteuerte Simulation mit ungleicher Lastverteilung durchgeführt. Abbildung 3-15 zeigt rechts noch einmal das untersuchte System. Links

sind die Ergebnisse für eine solche Lastverteilung im Vergleich zu einer Gleichverteilung aufgeführt. Gegenübergestellt werden die Sicherheitsindizes β .

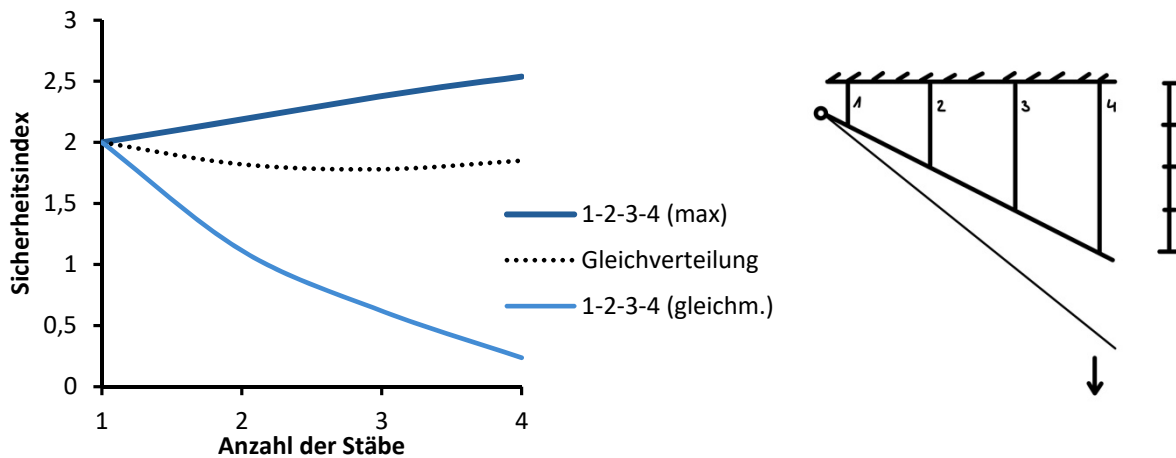


Abbildung 3-15: Verlauf des Sicherheitsindex für eine Gleich- sowie eine Ungleichverteilung (links) mit $\alpha = 2$, $\text{var} = 0,2$; Prinzip der Ungleichverteilung (rechts)

Für den Fall der Ungleichverteilung sind die Unterschiede in der Belastung auf die einzelnen Stäbe umso größer je mehr Stäbe im System vorhanden sind. Daher werden zwei verschiedene Varianten der Wahl der Last zur Bestimmung des Sicherheitsindex gewählt.

Zunächst wird die einwirkende Last wie für die Gleichverteilung angenommen. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Sicherheitsindex für diesen Fall (*1-2-3-4 (gleichm.)*) immer weiter sinkt je mehr Stäbe dem System hinzugefügt werden. Gut vergleichbar sind dieses und das klassische System allerdings nicht. Beim System mit der Ungleichverteilung der Last nimmt mit der Anzahl der Stäbe lediglich der Anteil der Stäbe zu, die stärker belastet werden.

Daher wird die Last für eine weitere Betrachtung so gewählt, dass der Sicherheitsindex α für den jeweils höchstbelasteten Dübel erreicht wird. Für diesen Fall (*1-2-3-4 (max.)*) ist ein Anstieg des Sicherheitsindex mit zunehmender Anzahl an Stäben zu erkennen.

3.2.3 Vergleich von Theorie und Numerik

Für den Vergleich von Numerik und Theorie bzw. für die Validierung des theoretischen Modells werden für verschiedene Lastverteilungen Werte für die Versagenswahrscheinlichkeit bestimmt. Die theoretischen Werte werden mit dem Konzept der Hyperwürfel direkt berechnet. Die Werte für die Simulationen werden, wie in Abschnitt 3.1.2.2 beschrieben, über den Anteil der versagten Systeme für die Last s an allen untersuchten Systemen bestimmt. Aus den bestimmten Versagenswahrscheinlichkeiten kann der Sicherheitsindex ebenfalls berechnet und dann verglichen werden. Die entsprechende Tabelle findet sich im Anhang, Tabelle A3.

Bei den betrachteten Lastverteilungen treten bei den Werten für β Abweichungen von bis zu 35 % auf. An dieser Stelle muss allerdings berücksichtigt werden, dass diese Werte aus den

bestimmten Werten der Versagenswahrscheinlichkeit P_f über $\beta = \Phi^{-1}(P_f)$ berechnet wurden. Vergleicht man die dazugehörigen Werte für P_f , beträgt die Abweichung nur noch etwa 5 %. Die häufigsten Abweichungen bei P_f betragen weniger als 3 %, einige wenige bis zu 9 %.

3.3 Ideal-plastische Systeme

Im Folgenden wird wieder eine gleichmäßige Lastverteilung angenommen. Das Materialverhalten wird nun jedoch nicht mehr als ideal-spröde, sondern als ideal-plastisch angenommen.

3.3.1 Theorie

Nach den Untersuchungen zu den spröden Daniels-Systemen wird nun ein ideal-plastisches Materialverhalten angenommen. Weitere Parameter sind nun die Fließspannung, anstelle der Bruchspannung, und die Bruchdehnung.

Für die Daniels-Systeme mit plastischem Materialverhalten wurden zunächst theoretische Überlegungen angestellt. Es wird untersucht, ob alle Stäbe bei Streuung aller Parameter den plastischen Bereich erreichen, bevor der erste Stab versagt. Da die Simulationen dehnungsgesteuert durchgeführt werden, hat die Querschnittsfläche A keinen Einfluss. Es wird die Streuung der Fließspannung f_y , der Bruchdehnung ε_u und des E-Moduls E berücksichtigt.

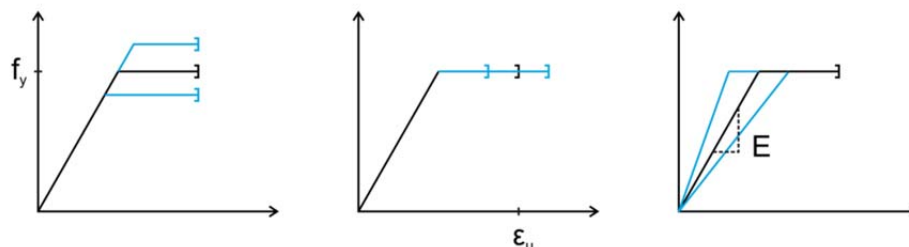


Abbildung 3-16: Mögliche Streuung der Parameter Fließspannung f_y , Bruchdehnung ε_u und Elastizitätsmodul E (schematische Darstellung)

Der kritische Fall stellt einen kleinen E-Modul bei einer gleichzeitig hohen Fließgrenze sowie einer möglichst geringen Bruchdehnung dar. Somit wird der elastische Bereich so weit wie möglich ausgedehnt und der plastische Bereich minimiert.

Mithilfe einer Excel-Tabelle [20] können verschiedene Variationskoeffizienten der einzelnen Parameter getestet werden. Die Prüfung, ob die Bruchdehnung kleiner als die Fließdehnung sein kann, wird mit Quantilwerten der einfließenden Parameter durchgeführt. Für die Variationskoeffizienten werden die Werte $var \in [0,05; 0,2]$ verwendet, für den E-Modul und die Bruchdehnung die Quantilwerte $x_p \in [10 \%; 10^{-4} \%]$ sowie $x_p \in [90 \%; 99,9999 \%]$ für die Fließgrenze. Für alle mit diesen Werten getesteten Kombinationen befinden sich alle Stäbe vor Versagen des ersten im plastischen Bereich. Bei einer idealen Normalverteilung

ergibt sich mit einer ausreichend großen Anzahl an Simulationen somit eine Tragfähigkeit von $F_{max} = n \cdot (A_i \cdot \mu_{fy})$. Das entspricht einem Abminderungsfaktor κ der Festigkeit von 1,0.

3.3.1.1 Literatur

Im „Handbuch für Bauingenieure“ [16] findet sich folgende Formel für die Versagenswahrscheinlichkeit eines Daniels-System mit der Annahme eines ideal-plastischen Materialverhaltens:

$$P_f(s) = \Phi\left(\frac{s - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right) \quad (3.8)$$

Die Werte μ und σ beschreiben dabei die Normalverteilung der Festigkeit der einzelnen Stäbe. Die Last s wird deterministisch angenommen zu:

$$s = n \cdot (\mu - a \cdot \sigma) \quad (3.9)$$

3.3.1.2 FORM

Das oben beschriebene Verfahren FORM, siehe Abschnitt 2.3.2, wird zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit verwendet. Werden sowohl die Last S als auch der Widerstand R als normalverteilt angenommen, ergibt sich:

$$P_f(s) = \Phi\left(-\frac{n \cdot \mu_R - n \cdot \mu_S}{\sqrt{n \cdot \sigma_R^2 + n \cdot \sigma_S^2}}\right) = \Phi\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\mu_S - \mu_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) \quad (3.10)$$

Wird dann die Last s deterministisch angenommen, ergibt sich das gleiche Ergebnis wie im Handbuch, siehe Gleichung (3.8).

3.3.1.3 Lineare Kombination normalverteilter Größen

Für das System werden nur Normalverteilungen angenommen. Für die lineare Kombination normalverteilter Größen gilt, siehe Kapitel 2.2.3:

$$Y = c + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \dots + a_n \cdot X_n \quad (3.11)$$

$$E[Y] = c + a_1 \cdot E[X_1] + a_2 \cdot E[X_2] + \dots + a_n \cdot E[X_n] \quad (3.12)$$

$$Var[Y] = a_1^2 \cdot Var[X_1] + a_2^2 \cdot Var[X_2] + \dots + a_n^2 \cdot Var[X_n] \quad (3.13)$$

Für die plastischen Daniels-Systeme werden einige Annahmen getroffen. Für alle Stäbe wird die gleiche Verteilung angenommen daher gilt:

$$X_1 = X_2 = \dots = X \quad (3.14)$$

Zudem übernimmt jeder Stab die gleiche Kraft, geht also einfach ein:

$$c = 0; a_i = 1 \quad (3.15)$$

Werden diese Bedingungen auf die obenstehenden Gleichungen angewendet, ergibt sich:

$$Y = n \cdot X \quad (3.16)$$

$$E[Y] = n \cdot E[X] \Rightarrow \mu_Y = n \cdot \mu_X \quad (3.17)$$

$$Var[Y] = n \cdot Var[X] \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{n \cdot \sigma_X^2} = \sqrt{n} \cdot \sigma_X \quad (3.18)$$

Das kann sowohl auf die Widerstände als auch auf die Einwirkungen angewandt werden. Für eine lineare Kombination der Form $M = R - S$ ergibt sich somit:

$$\mu_M = n \cdot \mu_R - n \cdot \mu_S \quad (3.19)$$

$$\sigma_M^2 = n \cdot \sigma_R^2 + n \cdot \sigma_S^2 \quad (3.20)$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit dieser linearen Kombination kann dann berechnet werden zu:

$$\Pr(M \leq 0) = F_M(0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi\left(-\frac{n \cdot \mu_R - n \cdot \mu_S}{\sqrt{n \cdot \sigma_R^2 + n \cdot \sigma_S^2}}\right) \quad (3.21)$$

Somit erhält man das gleiche Ergebnis wie bei der Anwendung von FORM. Bei Annahme einer deterministischen Last ergibt sich ebenfalls die im Handbuch aufgeführte Gleichung (3.8).

3.3.2 Numerische Untersuchungen

Die theoretischen Überlegungen wurden mithilfe von Simulationen überprüft. Insgesamt wurden Untersuchungen mit drei verschiedenen Parametersätzen und je 1.000 Durchläufen durchgeführt. Es wurde sowohl die Fließspannung f_y als auch die Bruchdehnung ε_u als normalverteilt angenommen. Deren Variationskoeffizienten wurden variiert, siehe Tabelle 3-2.

Tabelle 3-2: Parametersätze der numerischen Untersuchungen

	A	B	C
Variationskoeffizient der Fließspannung f_y	0,05	0,1	0,05
Variationskoeffizient der Bruchdehnung ε_u	0,05	0,05	0,1

Der Variationskoeffizient der Ergebnisverteilung ist für die drei verschiedenen Parametersätze in Abbildung 3-17 dargestellt. Für $n = 1$ entspricht dieser dem Variationskoeffizienten

von f_y und nähert sich für steigende n dem Wert Null. Beim Vergleich der Verläufe aus den Simulationen A und C ist erkennbar, dass der Variationskoeffizient von ε_u keinen Einfluss auf den Variationskoeffizienten der Ergebnisverteilung hat.

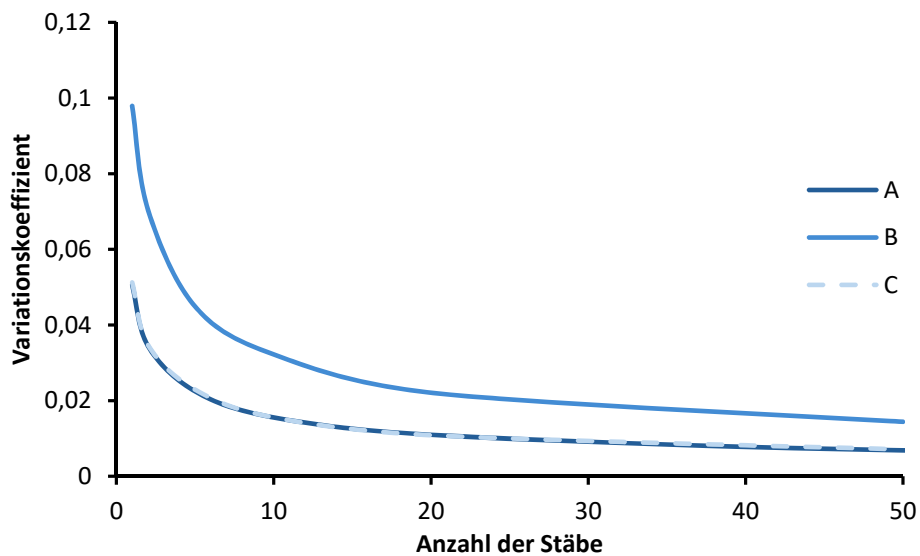


Abbildung 3-17: Variationskoeffizient der Ergebnisverteilung für die drei verschiedenen Parametersätze über Anzahl der Stäbe (1.000 Durchläufe)

Der Abminderungsfaktor κ , siehe Abbildung 3-18, schwankt geringfügig um den Wert eins. Mit steigender Anzahl der Stäbe des Systems nehmen diese Schwankungen weiter ab.

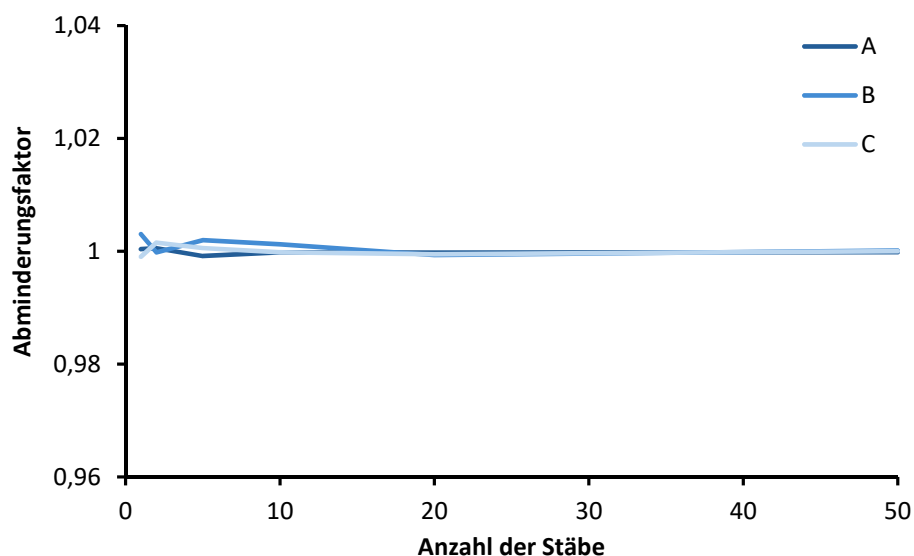


Abbildung 3-18: Abminderungsfaktor κ für plastische Daniels-Systeme über Anzahl der Stäbe

Für den späteren Vergleich der Simulationsergebnisse mit den theoretischen Versagenswahrscheinlichkeiten wurde mithilfe der erzeugten Datensätze ebenfalls die Versagenswahrscheinlichkeit bestimmt. Die Last s wurde dabei wie für die theoretischen Werte deterministisch zu $s = n \cdot (\mu - a \cdot \sigma)$ angenommen.

Da jeweils nur 1.000 Durchläufe simuliert wurden, können kleine Versagenswahrscheinlichkeiten nicht mehr über den Anteil der Versagensereignisse bestimmt werden. Wie auch schon in Kapitel 3.1.3 wird die Versagenswahrscheinlichkeit daher zusätzlich über die Ergebnisverteilung bestimmt. Für diese Verteilung werden Mittelwert und Standardabweichung ermittelt und anschließend der Sicherheitsindex für die deterministisch festgelegte Last s bestimmt. Aus diesem Wert wird über die Standardnormalverteilung die Versagenswahrscheinlichkeit P_f berechnet.

3.3.3 Vergleich von Theorie und Numerik

Die Ergebnisse der Simulation haben die vorherigen theoretischen Überlegungen bezüglich der maximalen Spannung je Stab bestätigt. Aufgrund der langen Rechenzeiten wurden je Parametersatz nur 1.000 Durchläufe durchgeführt. Die numerischen Abweichungen zu den theoretischen Überlegungen können mit dieser geringen Anzahl an Berechnungen erklärt werden.

In Tabelle 3-3 sind die Ergebnisse der Versagenswahrscheinlichkeit aus Theorie und Numerik für verschiedene n gegenübergestellt. Der hier verwendete Sicherheitsindex $\alpha = 1$ hat im Bauwesen keine Relevanz. Der Wert wurde an dieser Stelle jedoch gewählt, um so hohe Versagenswahrscheinlichkeiten zu erzeugen, dass die beiden Methoden zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit aus den Simulationsergebnissen verglichen werden können. Für höhere Werte des Sicherheitsindexes fällt der Wert für $P_{f, Anteil}$ bereits ab mehr als zwei Stäben auf Null ab.

Tabelle 3-3: Werte für die Versagenswahrscheinlichkeiten aus Simulation (1.000 Durchläufe) und Theorie; $\alpha = 1$; $var = 0,05$

n	Numerik		Theorie
	$P_{f, Verteilung}$	$P_{f, Anteil}$	$P_{f, Theorie}$
1	0,160	0,162	0,159
2	0,072	0,073	0,079
5	0,014	0,014	0,013
10	0,001	0,001	0,001
20	$2,86 \cdot 10^{-6}$	0	$3,87 \cdot 10^{-6}$
50	$1,80 \cdot 10^{-13}$	0	$7,69 \cdot 10^{-13}$

Zunächst wird hier deutlich, dass die beiden Methoden, um P_f aus den Simulationsergebnissen zu bestimmen, für kleine n sehr ähnliche Ergebnisse liefern. Auch mit den theoretischen Werten stimmen sie gut überein. Für größere n , also kleinere Versagenswahrscheinlichkeiten

ten, können nur noch $P_{f,Verteilung}$ und $P_{f,Theorie}$ miteinander verglichen werden. Deren Größenordnung stimmt überein. Bei diesem Vergleich ist immer zu beachten, dass die Anzahl der durchgeführten Simulationen für die Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeiten nicht ausreichend hoch ist.

Für einen im Bauwesen üblichen Sicherheitsindex von $\alpha = 3,8$ sind die Werte für den Sicherheitsindex und die Versagenswahrscheinlichkeit aus Simulation und Theorie in Tabelle 3-4 nochmals aufgeführt.

Tabelle 3-4: Werte für den Sicherheitsindex und die Versagenswahrscheinlichkeit aus Simulation (1.000 Durchläufe) und Theorie; $\alpha = 3,8$; $var = 0,1$

n	Numerik		Theorie	
	$\beta_{Verteilung}$	$P_{f,Verteilung}$	$\beta_{Theorie}$	$P_{f,Theorie}$
1	3,90	4,81E-05	3,80	7,23E-05
2	5,38	3,71E-08	5,37	3,85E-08
5	8,49	1,02E-17	8,50	9,72E-18
10	11,82	1,55E-32	12,02	1,45E-33
20	17,18	1,72E-66	16,99	4,54E-65
50	13,19	5,02E-40	26,87	2,5E-159

Für kleinere n sind sehr ähnliche Werte erkennbar. Mit weiter steigender Anzahl an Stäben sind jedoch größere Unterschiede der Ergebnisse auszumachen. Dies kann, wie oben bereits erwähnt, über die geringe Anzahl an Durchführungen erklärt werden.

3.4 Ideal-plastische Systeme mit korrelierten Widerständen

Die unter bestimmten Umständen auftretende Korrelation der Widerstände wird im Folgenden berücksichtigt.

3.4.1 Theorie

In [11] finden sich die theoretischen Grundlagen für eine Kombination normalverteilter korrelierter Größen. Genauere Ausführungen sind dem Kapitel 2.2.3 zu entnehmen.

Für die Anwendung zur Beschreibung der Verbundfuge werden einige Annahmen getroffen. Für alle Widerstände werden Normalverteilungen mit gleichen Werten für Mittelwert und Standardabweichung verwendet. Auch der Korrelationskoeffizient, dem ausschließlich positive Werte zugeordnet werden, wird für alle Widerstände gleich angenommen. Auch die

Vorfaktoren a_i wurden als konstant angenommen. Somit lässt sich der Ausdruck für den Variationskoeffizienten vereinfachen:

$$\begin{aligned} \text{Var}[g(x)] &= (\sigma_R^2 + \rho \cdot \sigma_R^2 \cdot (n-1)) \cdot n + \sigma_S^2 \\ &= (1 + \rho \cdot (n-1)) \cdot n \cdot \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit lässt sich somit bestimmen zu:

$$P_f = \Phi \left(-\frac{n \cdot \mu_R - \mu_S}{\sqrt{n \cdot [1 + \rho \cdot (n-1)] \cdot \sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right) \quad (3.23)$$

Die Last s ist unabhängig von den Widerständen, d.h. es besteht keine Korrelation zwischen Last und Widerstand. Wird die Last wie in anderen Modellen zuvor als deterministisch angesetzt, vereinfacht sich der Ausdruck und lässt sich direkt mit dem Ausdruck für idealplastische Daniels-Systeme vergleichen. Es ergibt sich:

$$P_f = \Phi \left(\frac{s - n \cdot \mu_R}{\sigma_R \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \rho \cdot (n-1)}} \right) \quad (3.24)$$

Gegenüber dem idealplastischen System ohne korrelierte Widerstände der Einzelemente enthält der Sicherheitsindex zusätzlich den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1 + \rho \cdot (n-1)}}$, siehe Gleichung (3.24). Dieser Faktor ist für alle gewählten Korrelationskoeffizienten immer kleiner oder gleich eins und reduziert somit den Sicherheitsindex. Dieser Trend ist in Abbildung 3-19 zu beobachten. Dort ist der Verlauf des Sicherheitsindexes für verschiedene Korrelationskoeffizienten in Abhängigkeit von n dargestellt.

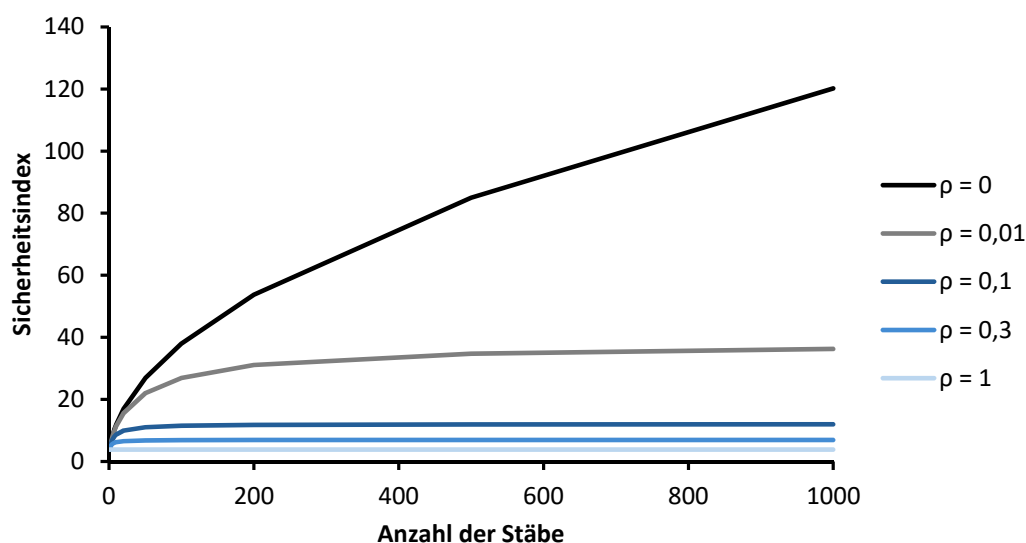


Abbildung 3-19: Verlauf des Sicherheitsindexes für verschiedene Korrelationskoeffizienten über Anzahl der Stäbe ($\alpha = 3,8$; $\text{var} = 0,1$)

Der Korrelationskoeffizient kann, wie weiter oben angenommen, Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Der Fall $\rho = 0$ entspricht dem unkorrelierten Fall und somit einem plastischen Daniels-System. Für $\rho = 1$ sind der Sicherheitsindex und damit die Versagenswahrscheinlichkeit über n konstant. Für alle Korrelationskoeffizienten $\rho < 1$ steigt der Sicherheitsindex mit zunehmender Anzahl an Stäben. Je größer der Koeffizient jedoch ist, desto geringer ist die Zunahme von β mit steigendem n .

3.5 Abgrenzung von Serien- und Parallelsystem

Das Seriensystem gilt als untere und das Parallelsystem als obere Grenze des Daniels-Systems. [18] In diesem Kapitel werden zunächst diese beiden Systeme vorgestellt und anschließend von den Daniels-Systemen abgegrenzt.

3.5.1 Ideales Seriensystem

Beim idealen Seriensystem wirkt die Last s auf alle Stäbe. Diese sind in Serie geschaltet, daher versagt das System, sobald ein Stab versagt. [18]

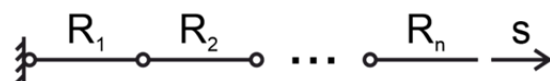


Abbildung 3-20: Schematische Darstellung eines idealen Seriensystems nach [18]

Die Überlebenswahrscheinlichkeit berechnet sich als Produkt aller Überlebenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Stäbe. [10] Für die Systemversagenswahrscheinlichkeit ergibt sich damit:

$$P_{f,sys} = \Pr(F_{sys,n}) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{Ri}(s)] \quad (3.25)$$

Mit steigender Anzahl an Stäben n steigt die Versagenswahrscheinlichkeit immer weiter an und nähert sich dem Wert 1. Wird zudem für alle Widerstände R die gleiche Verteilung F_R angenommen wird ergibt sich:

$$P_{f,sys} = \Pr(F_{sys,n}) = 1 - [1 - F_R(s)]^n \quad (3.26)$$

3.5.2 Ideales Parallelsystem

Im Parallelsystem wird die Last s gleichmäßig auf alle Stäbe n . Somit wirkt auf jeden Stab die Last $\frac{s}{n}$. Lastumverteilungen bei Versagen eines Stabes werden nicht berücksichtigt. Alle Stäbe werden einzeln für sich betrachtet. [18]

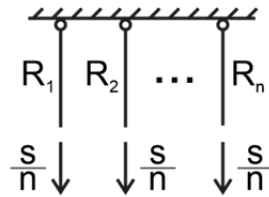


Abbildung 3-21: Schematische Darstellung eines idealen Parallelsystems nach [18]

Die Systemversagenswahrscheinlichkeit wird als Produkt aller Versagenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Stäbe berechnet. [10]

$$P_{f,sys} = \Pr(F_{sys,n}) = \prod_{i=1}^n F_R\left(\frac{S}{n}\right) \quad (3.27)$$

Ein Systemversagen tritt somit ein, wenn alle Stäbe unter der Last $\frac{S}{n}$ versagen. Mit steigender Anzahl an Stäben n sinkt die Versagenswahrscheinlichkeit. Wird für alle Widerstände R die gleiche Verteilung F_R angenommen, ergibt sich somit:

$$P_{f,sys} = \Pr(F_{sys,n}) = \left[F_R\left(\frac{S}{n}\right)\right]^n \quad (3.28)$$

3.5.3 Gegenüberstellung

Das Seriensystem versagt, wenn ein Stab des Systems versagt. Je mehr Stäbe vorhanden sind, desto wahrscheinlicher ist es, dass ein Stab des Systems versagt. Somit sinkt die Versagenswahrscheinlichkeit mit steigender Anzahl an Stäben.

Beim Daniels-System kann die Last, die von dem ausgefallenen Stab getragen wurde, ggf. von den anderen Stäben übernommen werden. Dieser Effekt tritt aber erst auf, wenn genügend Stäbe vorhanden sind, die dann jeweils nur einen kleinen Anteil aufnehmen müssen. In Abbildung 3-22 ist dieser Effekt erkennbar. Bevor der Sicherheitsindex des spröden Daniels-System mit steigendem n zunimmt, nimmt er zunächst ab.

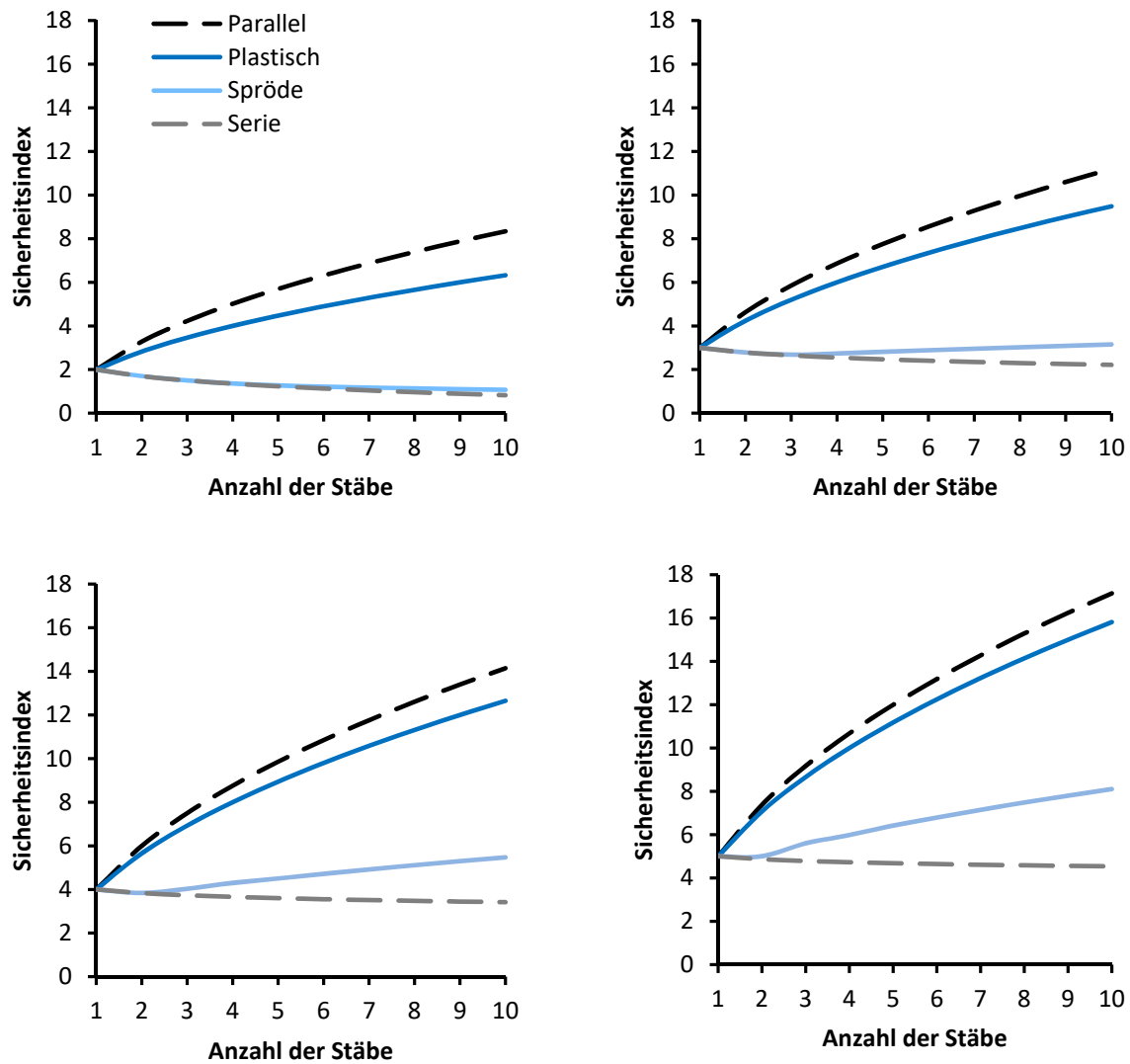


Abbildung 3-22: Vergleich des Sicherheitsindex von Serien- und Parallelsystemen mit spröden und plastischen Daniels-Systemen (für $a = 2$; $var = 01$)

Bei Betrachtung eines Parallelsystems tritt dieser Effekt nicht auf. Dort werden n voneinander unabhängige Stäbe mit jeweils der Last $\frac{s}{n}$ berücksichtigt. Lastumlagerungen wie beim Daniels-System gibt es hier nicht. Das System versagt erst, wenn alle Stäbe ausgefallen sind. Je mehr Stäbe vorhanden sind, desto wahrscheinlicher ist es, dass nicht alle Stäbe versagen.

Das plastische Daniels-System versagt erst, wenn sich alle Stäbe im plastischen Bereich befinden. Da die Stäbe mit geringerem Widerstand nicht direkt versagen, sondern nur keine weitere Last aufnehmen können, liegt der Sicherheitsindex über dem der spröden Daniels-Systeme. Aber auch hier stellt das Parallelsystem eine obere Grenze dar. Auch im plastischen Daniels-System kommt es zu Lastumlagerungen, im Parallelsystem wie oben beschrieben nicht.

4 Verbundträger

Zuerst wird das Modell für den Verbundträger beschrieben. An diesem wurden Voruntersuchungen durchgeführt, um das Verhalten des Trägers und die verschiedenen Versagensmöglichkeiten herauszuarbeiten. Im Anschluss sollen die in Kapitel 3 beschriebenen Modelle auf den Verbundträger angewendet werden. Dabei sollen Möglichkeiten und Grenzen der jeweiligen Modelle diskutiert werden.

4.1 Stabwerkmodell

Für die Untersuchungen wird ein Stabwerk-Feder-Modell eines Verbundträgers weiterentwickelt, welches bereits in vorherigen Forschungsprojekten verwendet wurde. [6]

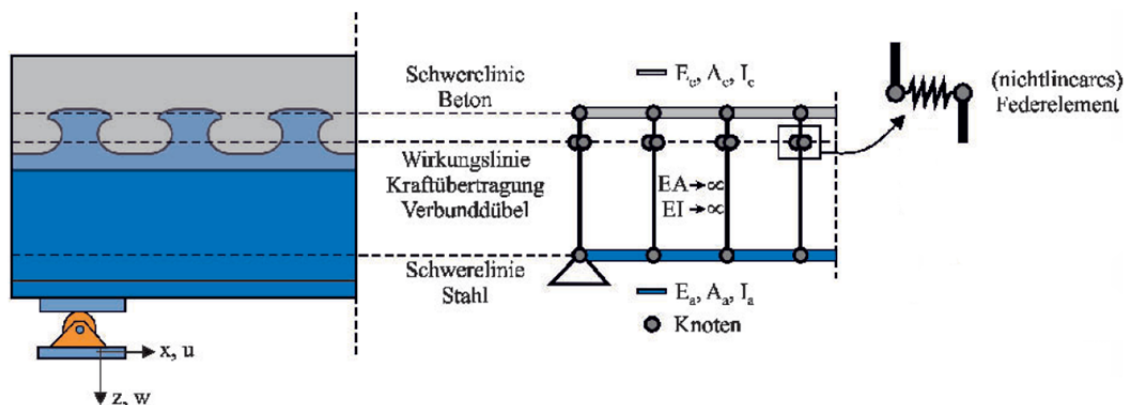


Abbildung 4-1: Aufbau des Stabwerkmodells [6]

Stahl und Beton werden durch Lamellen dargestellt, die über Koppelstäbe verbunden sind. Die Verbunddübel werden als Federn mit einer einstellbaren Steifigkeit modelliert, wobei auch nichtlineare Kraft-Weg-Verläufe berücksichtigt werden können. Sowohl ein sprödes als auch ein duktileres Materialverhalten der Verbundmittel kann so eingestellt werden. Auflager und Lasten können individuell definiert werden. Sowohl Strecken- als auch Einzellasten mit beliebiger Position sind möglich.

Die Last wird inkrementell bis zur definierten Belastung oder bis zum Versagen des Trägers gesteigert. Im letzteren Fall wird anschließend die Traglast ausgegeben. Als Versagenskriterien sind das Erreichen des maximalen Schlupfes oder das Versagen aller Dübel durch Erreichen der Maximalbelastung möglich. Neben der Durchbiegung, den Gesamt- und Teilschnittgrößen werden die Dübelkräfte und der Schlupfverlauf über die Trägerlänge als Ergebnisse ausgegeben und grafisch dargestellt. Ein Auszug aus dem Ergebnisplot des MATLAB-Modells ist in Abbildung 4-2 dargestellt.

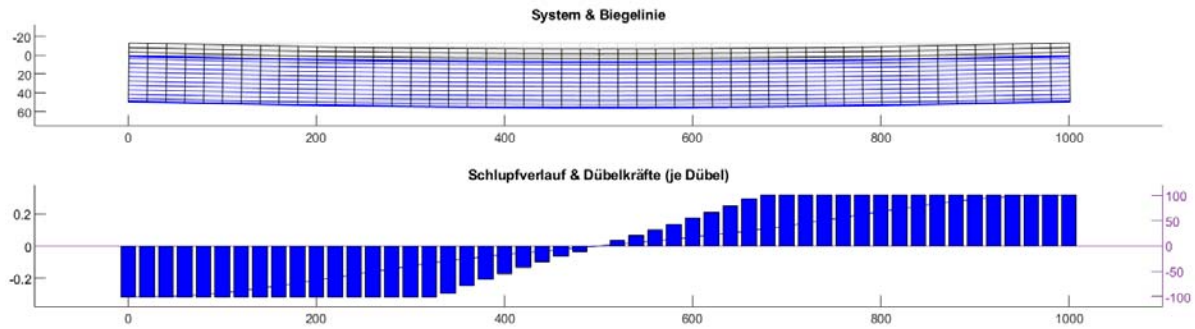


Abbildung 4-2: Stabwerkmodell (Auszug aus dem Ergebnisplot): Gesamtübersicht und Biegelinie; Schlupfverlauf und Dübelkräfte für einen Einfeldträger unter Streckenlast

4.1.1 Annahmen

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur einige ausgewählte, symmetrische Lastfälle betrachtet. Konkret sind das die volle Streckenlast, eine mittige Einzellast und zwei symmetrische Einzellasten. Das Verhalten des Trägers ist für diese symmetrischen Lastfälle sehr ähnlich, weshalb die folgenden Untersuchungen nur für den Lastfall „Streckenlast“ vorgestellt werden.

Für die Darstellung der Zusammenhänge werden Schlupf und Kraft im äußersten Dübel verwendet. In den theoretischen Betrachtungen entspricht diese Stelle der Stelle der Maximalwerte für Schlupf und Dübelkraft. Das ist im Modell nicht der Fall. Der Schlupf fällt an den Trägerenden leicht ab.

4.1.2 Voruntersuchungen

Zunächst wird das Stabwerkmodell mit Annahme eines spröden Materialverhaltens der Dübel betrachtet. Versagt ein Dübel, ist eine Art „Reißverschluss effekt“ erkennbar. Die Last des versagten Dübels wird auf die umliegenden umverteilt und führt in der Regel auch zu deren Versagen. Somit wird bei Versagen eines Dübels auch das Trägerversagen erreicht.

Ebenfalls wird das Trägerverhalten bei einem plastischen Materialverhalten der Verbunddübel untersucht. Die Last wird knapp unterhalb der Traglast gewählt. Es ist ersichtlich, dass der maximale Schlupf von $\delta_{max} = 6 \text{ mm}$ als Abbruchkriterium maßgebend wird. Nicht alle Dübel befinden sich im plastischen Bereich, bevor der Träger versagt.

Darauf folgend wurde der maximale Schlupf auf $\delta_{max} = 10 \text{ mm}$ erhöht. Bis auf drei Dübel in Trägermitte befanden sich alle Dübel bei Erreichen der Traglast im plastischen Bereich. Auch in diesem Fall ist der Grenzwert für den maximalen Schlupf das Abbruchkriterium.

Der Schlupf ist in Trägermitte für die symmetrischen Lastfälle immer gleich Null, daher werden die Dübel dort nie den plastischen Bereich erreichen. Somit ist der maximale Schlupf in allen Fällen das maßgebende Abbruchkriterium. Wird dieser in einem Dübel erreicht, versa-

gen quasi alle Dübel von einem Lastinkrement zum anderen. Es gibt, ähnlich wie beim spröden System, einen Reißverschlusseffekt.

4.1.3 Zusammenhänge von Last, Dübelkraft und Schlupf

Von besonderem Interesse ist das Verhalten des Trägers bei plastischem Materialverhalten der Verbunddübel, da dies eher dem realen Verhalten entspricht. Untersucht wird ein Träger mit 51 Dübeln mit je $P_R = 100 \text{ kN}$ für die Aufbringung einer vollen Streckenlast. Die ermittelte Traglast beträgt $118,9 \text{ kN/m}$. Die Belastung wird inkrementell aufgebracht. Für jedes Inkrement werden die einzelnen Dübelkräfte, die Gesamtdübelkraft, die Gesamtbelastung sowie der horizontale Schlupf im äußeren Dübel ausgelesen. Im Folgenden werden einige Zusammenhänge dieser Werte dargestellt.

Der Dübelkraftverlauf von einem Ende bis zur Trägermitte für verschiedene Belastungsinkremente ist in Abbildung 4-3 zu sehen. Deutlich zu erkennen ist der elastische und plastische Zustand sowie die Entwicklung der Dübelkräfte mit steigender Belastung.

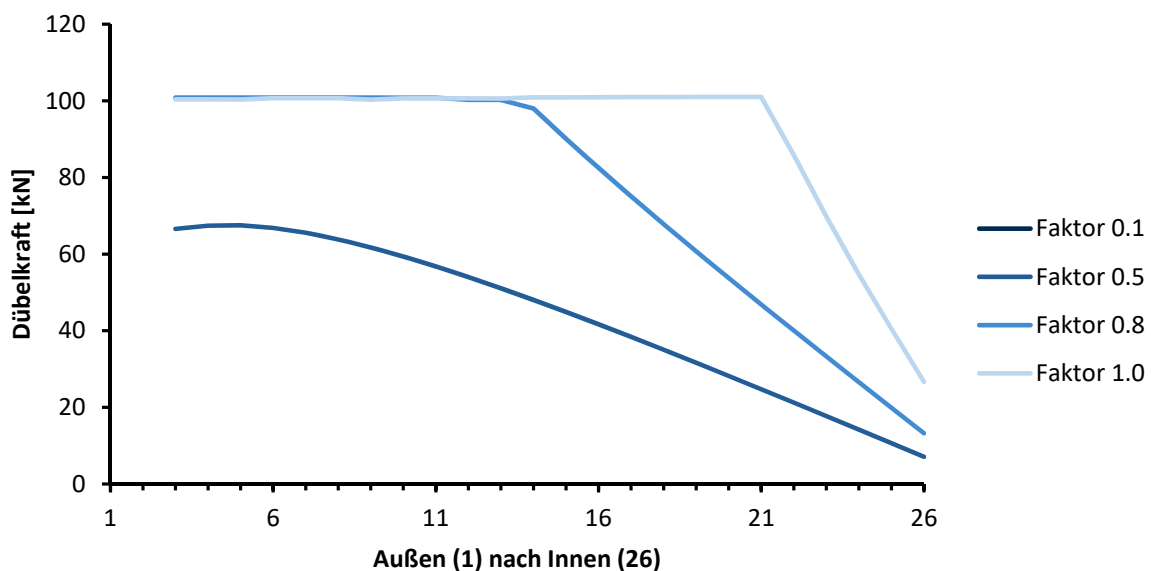


Abbildung 4-3: Dübelkraftverlauf für verschiedene Belastungen (Faktor: Anteil an $118,9 \text{ kN/m}$)

Es ist zu erkennen, dass bei Erreichen der Traglast (Faktor 1,0) nicht alle Dübel den plastischen Zustand erreicht haben. Das Erreichen des maximalen Schlupfes ist somit das maßgebende Abbruchkriterium. Zu erkennen ist dies auch in Abbildung 4-4. Dort ist der Schlupfverlauf der äußeren Dübel über die aufgebrachte Last zu sehen.

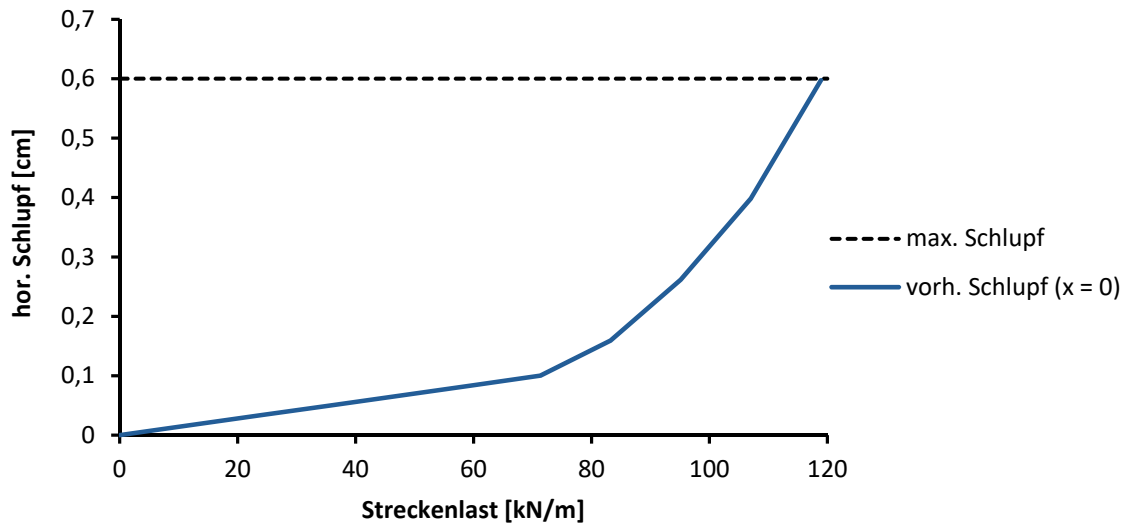


Abbildung 4-4: Horizontaler Schlupf der äußeren Dübel über die aufgebrachte Last

Befinden sich alle Dübel im elastischen Bereich, ist dieser Zusammenhang linear. Sobald sich einige Dübel im plastischen Bereich befinden, steigt der Schlupf mit steigender Last immer schneller an. Dieser Punkt lässt sich in diesem Beispiel bei einer Streckenlast von etwa 71 kN/m ausmachen.

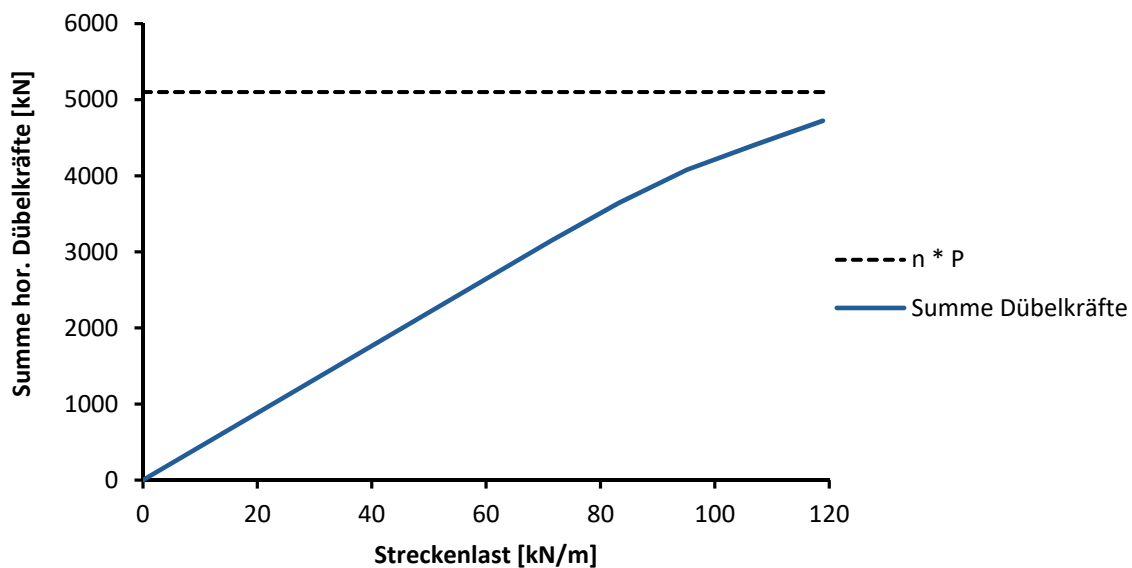


Abbildung 4-5: Verlauf der Summe der Dübelkräfte über die aufgebrachte Last

In Abbildung 4-5 ist der Verlauf der Summe aller Dübelkräfte über die aufgebrachte Last zu sehen. Im elastischen Bereich steigt diese linear mit der aufgebrachten Last an. Mit steigender Anzahl an Dübeln im plastischen Bereich nimmt die Steigung ab. Würden alle Dübel den plastischen Bereich erreichen, wäre die Summe aller Dübelkräfte in diesem Beispiel

$$\sum P_i = n \cdot P_{Rd} = 51 \cdot 100 \text{ kN} = 5.100 \text{ kN} \quad (4.1)$$

Dieser Wert wird hier nicht erreicht, da vorher der maximale Schlupf δ_{max} erreicht wird. Würde der Grenzwert δ_{max} angehoben, würden bis auf wenige Dübel alle den plastischen Bereich und damit P_{Rd} erreichen. Der Wert $n \cdot P_{Rd}$ würde somit fast erreicht. Wenn die Dübelkräfte P_{Rd} jeweils normalverteilt angenommen werden, dann gilt Gleichung (4.1) nicht bzw. nicht exakt. Die Anzahl $n = 51$ reicht nicht aus, damit $\sum P_i = n \cdot P_{Rd}$ wird. Es kommt zu geringen Abweichungen.

4.1.4 Gegenüberstellung von Schlupf und Schlupffunktion

Weiterhin wurde der Schlupfverlauf des Stabwerkmodells mit den theoretischen Werten für den Schlupf verglichen, siehe Kapitel 2.1.3. Betrachtet wurde das oben beschriebene Beispiel mit 51 Dübeln und einer Traglast von 118,9 kN/m.

Die Schlupffunktion aus dem Glasbau gilt nur für den elastischen Bereich, das Stabwerkmodell bildet sowohl den elastischen als auch den plastischen Bereich ab. Daher werden in diesem Kapitel Werte aus dem elastisch-plastischen Modell denen der elastischen Theorie gegenübergestellt. Das ist hier bewusst geschehen, um den Unterschied sowie die Anwendungsgrenzen der theoretischen Schlupffunktion zu verdeutlichen. In Abbildung 4-6 ist der Schlupfverlauf über den Träger für zwei verschiedene Belastungen aufgezeichnet.

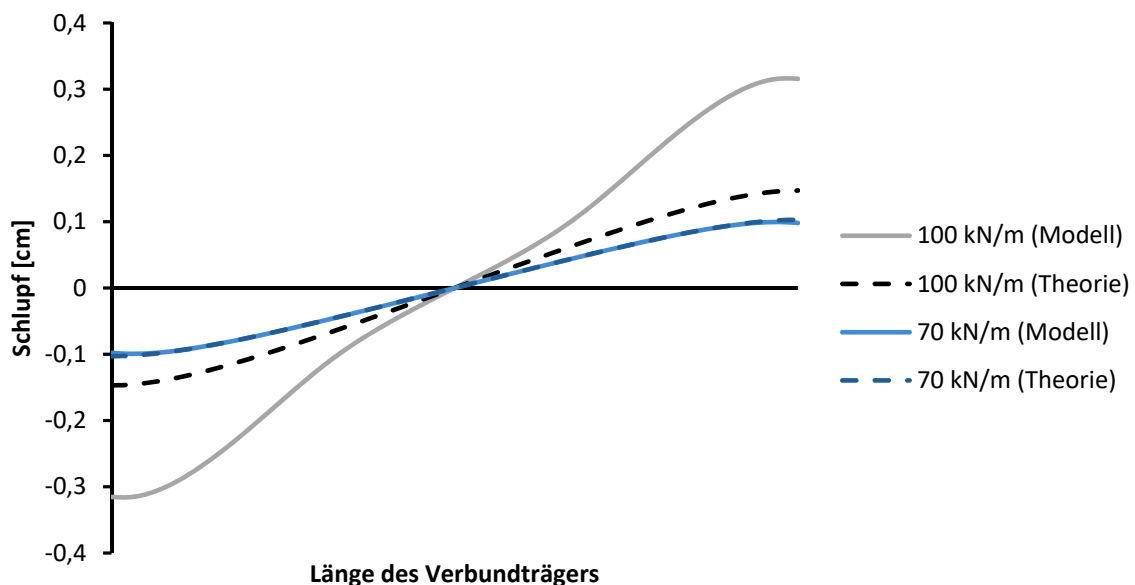


Abbildung 4-6: Schlupfverlauf aus Theorie und Stabwerkmodell über die Länge des Verbundträgers für zwei verschiedene Belastungen

Für den Lastfall „70 kN/m“ befinden sich alle Dübel noch im elastischen Bereich. Die Werte aus der analytischen Berechnung und dem Stabwerkmodell weichen nur sehr geringfügig voneinander ab. Für den plastischen Fall „100 kN/m“ ist zu erkennen, dass sich das Stabwerkmodell im Vergleich zur Theorie deutlich anders verhält als im elastischen Bereich. Je mehr Dübel sich im plastischen Bereich befinden, desto größer ist der Unterschied zwischen

den theoretischen Werten und denen des Stabwerkmodells. Die Schlupffunktion unterschätzt den Wert für den Schlupf somit immer mehr.

4.2 Anwendung der (Daniels-) Systeme auf die Verbundfuge

Um die Versagenswahrscheinlichkeiten mithilfe von Monte-Carlo-Simulationen zu bestimmen, wäre eine extrem große Anzahl an Simulationen notwendig. Eine Versagenswahrscheinlichkeit von beispielsweise $1 \cdot 10^{-4}$ entspricht in der Theorie einem Versagensfall bei 10.000 Berechnungen, bei $1 \cdot 10^{-8}$ würde ein Versagensfall in 100.000.000 Durchläufen auftreten, siehe Tabelle 4-1.

Tabelle 4-1: Versagenswahrscheinlichkeit und zugehöriger Sicherheitsindex

1 Versagensereignis je x Berechnungen	Versagenswahrscheinlichkeit	Sicherheitsindex
1.000	$1 \cdot 10^{-3}$	3,09
10.000	$1 \cdot 10^{-4}$	3,72
100.000	$1 \cdot 10^{-5}$	4,26
1.000.000	$1 \cdot 10^{-6}$	4,75
10.000.000	$1 \cdot 10^{-7}$	5,20
100.000.000	$1 \cdot 10^{-8}$	5,61
1.000.000.000	$1 \cdot 10^{-9}$	6,00
10.000.000.000	$1 \cdot 10^{-10}$	6,36

Um Versagenswahrscheinlichkeiten in dieser Größenordnung zu bestimmen müssten nochmal mehr Berechnungen durchgeführt werden. Ab einer gewissen Versagenswahrscheinlichkeit wird es im Hinblick auf Rechenkapazität und -zeit unrealistisch so viele Simulationen durchzuführen. Dies ist schon bei den Versagenswahrscheinlichkeiten der Daniels-Simulationen erkennbar, beispielsweise in Tabelle 3-3 in Kapitel 3.3.3. Dort wurde die Versagenswahrscheinlichkeit über den Anteil der versagten Systeme an den Gesamtdurchläufen bestimmt. Die Vorgehensweise kann nur für kleine n verwendet werden, in denen die Versagenswahrscheinlichkeit noch ausreichend hoch war. Bereits bei $n = 20$ ist die so bestimmte Versagenswahrscheinlichkeit gleich Null, während der theoretische Wert bei $3,87 \cdot 10^{-6}$ liegt.

Im vorherigen Kapitel 3 hat sich gezeigt, dass die Versagenswahrscheinlichkeit für steigende n immer kleiner wird. Für den Verbundträger wären Monte-Carlo-Simulationen somit nicht umsetzbar und theoretische Überlegungen sind notwendig. Die zuvor vorgestellten Modelle

sollen auf den Verbundträger angewendet werden. Dabei wird mit einfachen Systemen wie dem idealen Daniels-System begonnen und die Komplexität schrittweise gesteigert.

4.2.1 Ideal-sprödes System mit $n=1$

Zunächst werden ein sprödes Materialverhalten der Verbundmittel sowie ein Trägerversagen bei Versagen des ersten Dübels angenommen. Zudem werden alle geometrischen und materialspezifischen Parameter als deterministisch festgelegt.

Die vorhandene Dübelkraft lässt sich mithilfe der Schlupffunktion in Abhängigkeit von Geometrie und Material sowie der Auflast bestimmen. Der maximale Schlupf, und damit auch die maximale Dübelkraft, befindet sich bei Verwendung der Schlupffunktion im äußersten Dübel und wird daher als $\delta(x = b)$ bezeichnet. Zu Einzelheiten der Berechnung siehe Anhang, Tabelle A1. Für das Beispiel eines Vierpunkt-Biegeversuchs mit den zwei Auflasten F kann die vorhandene Dübelkraft P_S wie folgt ausgedrückt werden:

$$P_S = \delta(x = b) \cdot c_{fx} = -\frac{\beta_s \cdot c_{fx}}{\alpha_s^2} \cdot \left[1 - \frac{\cosh(a \cdot \alpha_s)}{\cosh((a + b) \cdot \alpha_s)} \right] \cdot F = k \cdot F \quad (4.2)$$

Wobei k eine Konstante, bestehend aus einem Teil der Schlupffunktion und der Steifigkeit c_{fx} darstellt und F eine Einzellast der äußeren Vierpunkt-Biegebeanspruchung ist. Die Grenzzustandsfunktion für das Versagen des äußersten Dübels lautet somit:

$$g(P_R, P_S) = P_R - P_S = P_R - k \cdot F \quad (4.3)$$

Nun werden der Widerstand P_R und die Last F als normalverteilt angenommen. Mithilfe von FORM (siehe Kapitel 2.3.2) kann der Sicherheitsindex β ermittelt werden zu:

$$\beta = \frac{\mu_{P_R} - (k \cdot \mu_F)}{\sqrt{\sigma_{P_R}^2 + (k \cdot \sigma_F)^2}} \quad (4.4)$$

Für diesen Fall ist nur die Tragfähigkeit des maximal belasteten Dübels von Bedeutung. Die Anzahl der Dübel spielt nur eine indirekte Rolle und geht über den gewählten Dübelabstand ein. Im Faktor k ist ein Faktor von etwa $\frac{1}{n}$ enthalten. Steigt also die Anzahl der Dübel, verringert sich die Einwirkung auf den Einzeldübel $k \cdot F$ und der Sicherheitsindex steigt an. Für die Ausgangswerte können auch andere Verteilungen gewählt und der Sicherheitsindex dann mithilfe von FORM bestimmt werden.

4.2.2 Ideal-sprödes Seriensystem

Es ist möglich, dass nicht der äußerste Dübel als Erstes versagt. Somit müssten mehrere Dübel betrachtet werden, was beispielsweise über ein Seriensystem geschehen kann. Angenommen wird für dieses System, dass die Last in allen Dübeln sowie auch die Verteilung F_R

für alle Widerstände gleich sind. Ein beliebiger Dübel in der Verbundfuge kann somit versagen und das führt dann zum Systemversagen.

$$\begin{aligned} P_{f,sys} &= \Pr(F_{sys,n}) = 1 - [1 - F_R(s)]^n \\ \beta &= -\Phi^{-1}(P_{f,sys}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Für ein Seriensystem steigt die Versagenswahrscheinlichkeit mit einer steigenden Anzahl n immer weiter an bzw. der Sicherheitsindex nimmt immer weiter ab. Dieses System ist für die Modellierung der Verbunddübelleiste ungeeignet, da die Dübelkraft über die Trägerlänge nicht konstant, d.h. nicht für alle Dübel gleich ist.

Ein neuer Ansatz ist daher ein Seriensystem mit gleicher Verteilung F_R für alle Widerstände, aber einer unterschiedlichen Belastung s_i für jeden Dübel.

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_R(s_i)) \quad (4.6)$$

Im Folgenden wird dieser Ansatz als „modifiziertes Seriensystem“ bezeichnet. Für einen Beispielträger wurden die Versagenswahrscheinlichkeiten und dazugehörige Sicherheitsindizes auf diese Weise bestimmt.

Es wurde ein symmetrischer Lastfall eines Vierpunkt-Biegeversuchs gewählt. Bei Betrachtung des gesamten Trägers ist die Last in zwei Dübeln somit immer gleich. Die veränderlichen Eingangsparameter waren die Anzahl der Dübel n bzw. der Dübelabstand e_x sowie der Startwert des Sicherheitsindex β_1 . Dieser Startwert entspricht dem Sicherheitsindex, wenn nur ein Dübel (bzw. zwei aufgrund der Symmetrie) betrachtet wird. Der Widerstand der Dübel wurde somit für jeden Fall so angepasst, dass für einen (bzw. zwei) Dübel der Sicherheitsindex β_1 erreicht wurde.

In den Untersuchungen wurden mehrere Dübelabstände sowie zwei verschiedene Sicherheitsindizes betrachtet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4-7 zu sehen. Da die Anzahl der Dübel im Träger variiert wurde, wird nicht über die absolute Dübelanzahl aufgetragen, sondern über den Prozentsatz der Dübel, die berücksichtigt werden. Der Sicherheitsindex nähert sich für alle betrachteten Fälle einem jeweiligen Grenzwert.

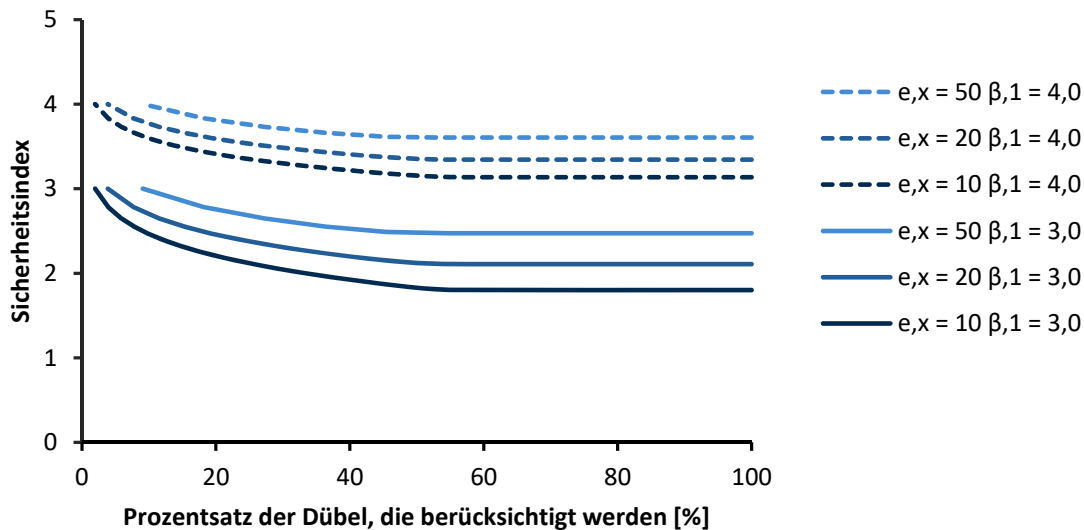


Abbildung 4-7: Verlauf des Sicherheitsindex für das modifizierte Seriensystem über den Anteil der berücksichtigten Dübel

Für das ideal spröde System mit $n = 1$ wurde nur der äußerste Dübel betrachtet. Hier werden immer mehr Dübel vom Trägerrand hin zur Trägermitte mit einbezogen. Die Dübelkraft nimmt vom Trägerrand zur Trägermitte immer weiter ab, daher werden immer geringere Versagenswahrscheinlichkeiten mit einbezogen. Für einen symmetrischen Lastfall sind Schlupf und Dübelkraft in Trägermitte gleich Null, und damit auch die zugehörige Versagenswahrscheinlichkeit. Somit wird ein Grenzwert erreicht.

Es sind Unterschiede zwischen den Dübelabständen zu erkennen. Je größer der Dübelabstand ist, desto geringer ist die Abnahme des Sicherheitsindex. Dieser Einfluss entsteht allerdings nicht durch den Dübelabstand, sondern durch die dadurch bedingte Anzahl an Dübeln. Werden mehr Dübel in Betracht gezogen, steigt die Versagenswahrscheinlichkeit. In der folgenden Abbildung 4-8 findet sich für einen Beispielträger mit 51 Dübeln der Vergleich der Systemversagenswahrscheinlichkeiten des klassischen Seriensystems und des modifizierten.

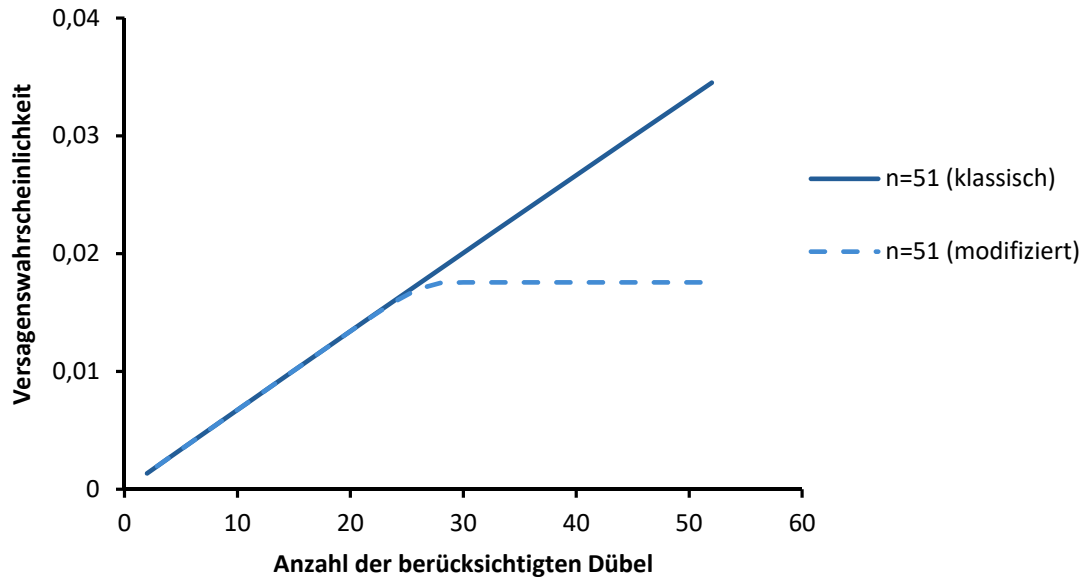


Abbildung 4-8: Versagenswahrscheinlichkeit für das klassische und das modifizierte Seriensystem über die Anzahl der berücksichtigten Dübel

Für das modifizierte Seriensystem ist das Erreichen eines Grenzwertes gut erkennbar. Für das klassische System, für das die gleiche Dübellast für alle Dübel angenommen wird, steigt die Versagenswahrscheinlichkeit immer weiter an. Das modifizierte Seriensystem ist immer noch eine sehr konservative Annahme. Das Versagen eines beliebigen Dübels im Träger führt hier direkt zum Systemversagen. Trotzdem lässt sich ein Grenzwert ausmachen, der nicht sehr stark vom Ausgangswert abweicht.

4.2.3 Ideal-sprödes Daniels-System

Weiterhin können mehrere Dübel über das oben beschriebene Daniels-System berücksichtigt werden. Zunächst werden eine gleiche Verteilung F_R für alle Widerstände, eine gleichmäßige Lastverteilung sowie eine gleichmäßige Lastumverteilung nach Versagen eines oder mehrerer Dübel angenommen. Außerdem wird ideal-sprödes Kraft-Schlupf-Verhalten der Dübel, d.h. ein sprödes Dübelversagen, vorausgesetzt.

Die Versagenswahrscheinlichkeit P_f entspricht in diesem Fall somit der eines ideal-spröden Daniels-Systems und kann nach Kapitel 3.1.1 berechnet werden. Es ist jedoch zu beachten, dass die Umverteilung der Kräfte innerhalb eines Verbundträgers nicht der oben genannten Annahme einer gleichmäßigen Umverteilung entspricht, wie dies für das klassische Daniels-System der Fall ist. Dementsprechend wird die Sicherheit in diesem Fall überschätzt.

4.2.4 Ideal-plastisches System

Der obere Grenzwert des Sicherheitsindex ergibt sich, wenn die Verbunddübelleiste als ideal-plastisches Daniels-System angenommen wird. Dabei wird die Annahme eines idealen Parallelsystems nicht berücksichtigt. Die dafür getroffenen Annahmen sind nicht realitätsnah.

Das Systemversagen tritt für ein ideal-plastisches Daniels-System beim Versagen aller Verbundmittel ein. Zu diesem Zeitpunkt befinden sich bereits alle Verbundmittel im plastischen Bereich (siehe theoretische Überlegungen in Kapitel 3.3.1) und der Widerstand der Dübel beträgt jeweils P_R . Die maximale Kraft in der Verbundfuge beträgt somit im Mittel $P_{ges,max} = n \cdot P_R$. Werden für dieses System nun Widerstand und Einwirkung normalverteilt angenommen, beträgt der Sicherheitsindex:

$$\beta = \sqrt{n} \cdot \frac{\mu_{P_R} - (k \cdot \mu_F)}{\sqrt{\sigma_{P_R}^2 + (k \cdot \sigma_F)^2}} \quad (4.7)$$

Neben dem beim spröden System mit einem Dübel genannten Einfluss der Anzahl der Verbundmittel in der Verbundfuge geht diese hier zusätzlich über den Faktor \sqrt{n} ein und steigert den Sicherheitsindex zusätzlich.

Dieser Ansatz setzt voraus, dass sich alle Dübel im plastischen Bereich befinden. In der Praxis wird dieser Zustand jedoch nie ganz erreicht. In den Untersuchungen am Stabwerkmodell (Kapitel 4.1.2) hat sich gezeigt, dass sich immer noch einige Dübel im elastischen Bereich befinden, wenn der maximale Schlupf in einem anderen Dübel erreicht wird. Die maximale Kraft in der Verbundfuge erreicht somit nie ganz den Wert $F_{max} = n \cdot P_{Rd}$ bzw. $F_{max} = n \cdot \mu_{P_{Rd}}$ bei Annahme einer Normalverteilung.

Der Grenzwert für $\sum_{i=1}^n P_i$ ist etwas geringer als $n \cdot P_{Rd}$, siehe Abschnitt 4.1.3. Das Verhalten kann daher nicht exakt über ein plastisches Daniels-System beschrieben werden.

4.2.5 Ideal-plastisches System mit korrelierten Widerständen

Aus den oben aufgeführten Überlegungen ergibt sich:

$$P_f = \Phi \left(\frac{s - n \cdot \mu_R}{\sigma_R \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \rho \cdot (n - 1)}} \right) \quad (4.8)$$

Daher kann der Sicherheitsindex gegenüber dem unkorrelierten ideal-plastischen System aus Gleichung (4.7) um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1 + \rho \cdot (n - 1)}}$ erweitert werden:

$$\beta = \sqrt{n} \cdot \frac{\mu_{P_R} - (k \cdot \mu_F)}{\sqrt{\sigma_{P_R}^2 + (k \cdot \sigma_F)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \rho \cdot (n - 1)}} \quad (4.9)$$

Der Einfluss des Korrelationskoeffizienten ist in Abbildung 3-19 in Kapitel 3.4.1 zu sehen. Bei einzeln aufgeschweißten Kopfbolzendübeln sind geringere Korrelationskoeffizienten zu erwarten als bei den durch einen Brennschnitt hergestellten Verbunddübelleisten.

4.2.6 Anpassung der Steifigkeit

Aus den Untersuchungen am Stabwerkmodell hat sich das Erreichen des maximalen Schlupfes als das maßgebende Versagenskriterium herausgestellt. Ein Ansatz, dies zu berücksichtigen, ist die Annahme eines spröden Verhaltens der Dübel, wie es in Abschnitt 4.2.1 der Fall ist. In diesem vorherigen Abschnitt wurde das Erreichen von P_R als Versagen definiert. Gleichbedeutend wäre ein Versagen bei Erreichen von δ_y , dem vorhandenen Schlupf bei Erreichen von P_R . In diesem Ansatz wird jedoch nicht δ_y , sondern der Schlupf bei Erreichen der Bruchdehnung δ_{max} als Versagenskriterium definiert. Damit allerdings die Kraft P_R nicht überschätzt wird, wird die Steifigkeit C_{fx} angepasst. Sie wird durch den Wert $C_{fx}^* = \frac{P_R}{\delta_{max}}$ approximiert. In Abbildung 4-9 (links) wird der beschriebene Ansatz veranschaulicht. Da der Verlauf als elastisch approximiert wird, kann die Schlupffunktion verwendet werden. Die Anwendung der Schlupffunktion mit einer angepassten Steifigkeit ist für einen Beispielträger mit zwei verschiedenen Belastungen durchgeführt worden, siehe Abbildung 4-9 (rechts).

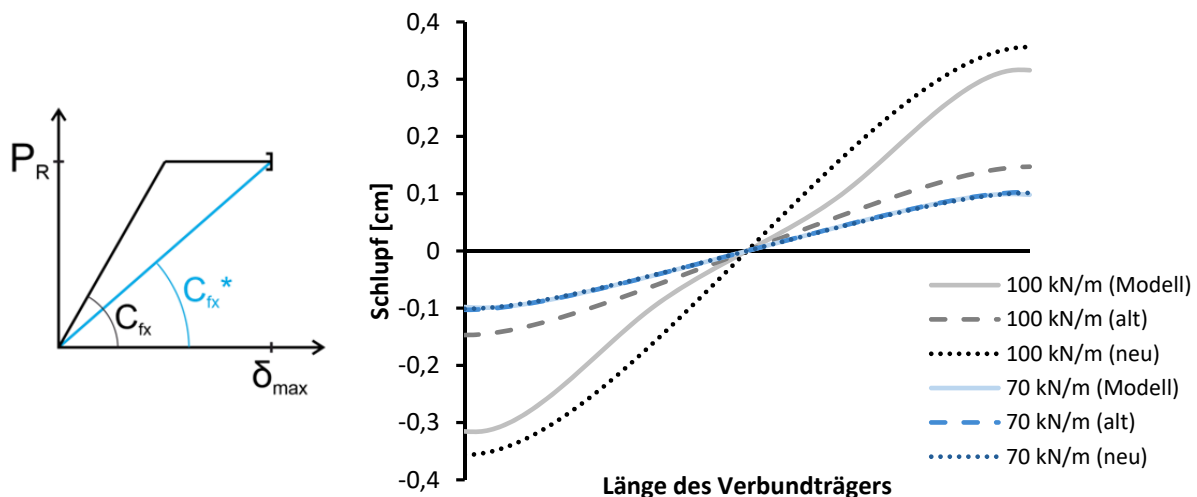


Abbildung 4-9: Veranschaulichung von C_{fx}^* (links); Schlupfverlauf für C_{fx} und C_{fx}^* (rechts)

Befindet sich, wie es für den Lastfall „70 kN/m“ der Fall ist, ein Großteil der Dübel im elastischen Bereich, sind im Schlupfverlauf zwischen den Ergebnissen aus Theorie und Modell kaum Unterschiede auszumachen. Während die theoretische Lösung bei konstanter Steifigkeit C_{fx} im Lastfall „100 kN/m“ den Schlupf deutlich unterschätzt, wird dieser durch die angepasste Steifigkeit C_{fx}^* überschätzt.

Für das weitere Vorgehen wird zunächst (wie in Abschnitt 4.2.1) lediglich ein Dübel betrachtet. Der vorhandene Schlupf δ_{vorh} als Einwirkung wird als der Wert für den äußersten Dübel, der maximale Wert der Schlupffunktion, bestimmt. Sowohl der Widerstand P_R als auch der Widerstand δ_{max} können deterministisch oder verteilt angenommen werden. Würden eine oder beide Größen bspw. normalverteilt angenommen, wäre die Ersatzsteifigkeit C_{fx}^* ebenfalls normalverteilt. Diese Größe geht jedoch nichtlinear in die Berechnung der Beiwerte und

damit in die Berechnung der Einwirkung s ein. Eine analytische Berechnung ist daher auf diese Weise nicht möglich.

Eine Möglichkeit durch vereinfachte Annahmen wäre, die Berechnung von C_{fx}^* anhand der Mittelwerte von P_R und δ_{max} durchzuführen. Damit wäre der Wert der Ersatzsteifigkeit ein fester Wert und oben beschriebene Probleme würden umgangen. Für die Bestimmung des Sicherheitsindex können dann eine oder beide Größen als normalverteilt angenommen werden. Dieser ergibt sich, analog zu den vorherigen Modellen, als lineare Kombination normalverteilter Größen:

$$\beta = \frac{\mu_R - s}{\sqrt{\sigma_R^2}} \quad (4.10)$$

Oder bei zusätzlich streuender Einwirkung s siehe Gleichung (4.4).

Wird nur ein Dübel betrachtet, bleibt der Sicherheitsindex konstant. Die veränderte Steifigkeit ändert nichts. Das Modell hier entspricht dem Modell in Abschnitt 4.2.1, dem ideal-spröden System mit $n = 1$. Für den Fall, dass mehrere Dübel betrachtet werden sollen, gelten die Überlegungen analog zu Abschnitt 4.2.2, dem ideal-spröden Seriensystem. Durch diesen neuen Ansatz gibt es somit auch keine Veränderungen in der Entwicklung des Sicherheitsindex gegenüber den Ausführungen in Abschnitt 4.2.1 und 4.2.2.

4.2.7 Ungleiche Lastverteilung

In der Verbundfuge ist die Last in der Realität nicht in jedem Verbundmittel gleich groß. Es handelt sich um eine ungleiche Lastverteilung. Bei Versagen einzelner Dübel kommt es darüber hinaus zu ungleichmäßigen Lastumverteilungen. Die Versagenswahrscheinlichkeit für ein solches System kann, unter Annahme spröder Verbundmittel, wie in Kapitel 3.1.1.3 und 3.2.1 beschrieben, mit der Methode der Hyperwürfel bestimmt werden. Somit ergibt sich eine Einschränkung der Methode theoretisch auf $n = 6$, bzw. für eine akzeptable Rechen-dauer in Parameterstudien auf $n = 5$.

Als Eingangsparameter wird die Lastverteilung aus dem Stabwerkmodell genutzt. Dieses wird so modifiziert, dass nur noch zehn Dübel (fünf je Seite) im Modell vorhanden sind. Aufgrund des numerischen Aufwandes ist diese Variante nur bis $n = 5$ umsetzbar. Wird ein symmetrisches System verwendet, können dementsprechend zehn Dübel berücksichtigt werden. Aufgrund der Symmetrie gilt in diesem Fall die Annahme, dass zwei Dübel gleichzeitig versagen. Die theoretischen Modelle können für alle Verbundmitteltypen verwendet werden. Dieses Modell hier beruht auf den Berechnungen des Stabwerkmodells, welches Verbunddübelleisten darstellt. Zunächst werden, wie in den vorherigen Berechnungen auch, die System- und Querschnittsparameter eingegeben. Zudem werden Anzahl und Lage der Verbundmittel festgelegt. Das untersuchte System mit zwei Beispielen zur Dübelverteilung ist in Abbildung 4-10 zu sehen.

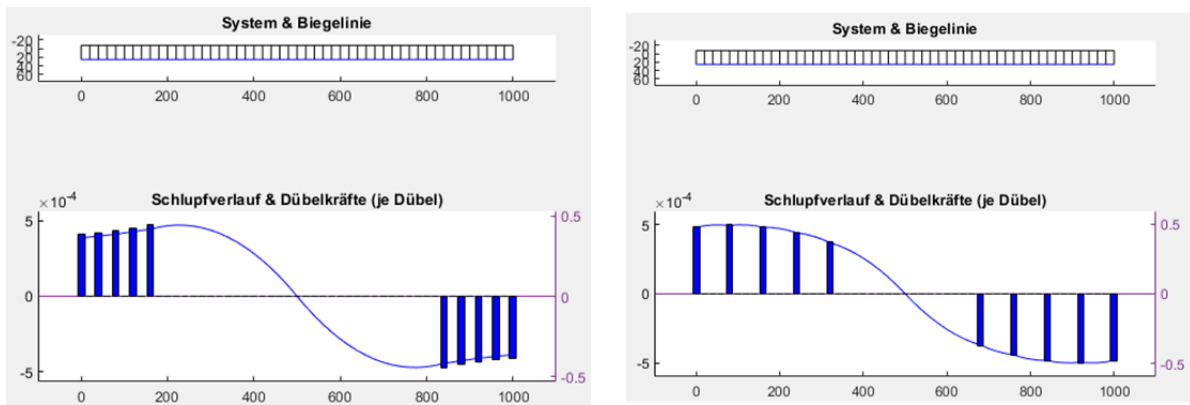


Abbildung 4-10: Untersuchtes System mit verschiedenen Dübelverteilungen

Mit den eingegebenen Parametern wird das Stabwerkmodell berechnet und die vorhandenen Dübelkräfte gespeichert. Nachfolgend soll dann das Ausfallen der Dübel berücksichtigt werden, wobei $n!$ verschiedene Ausfallkombinationen zu berücksichtigen sind. Jede dieser Kombinationen wird untersucht. Die Dübel werden schrittweise als ausgefallen angenommen, ein Beispiel zeigt Abbildung 4-11. Die Belastung auf den jeweils nächsten ausfallenden Dübel wird gespeichert.

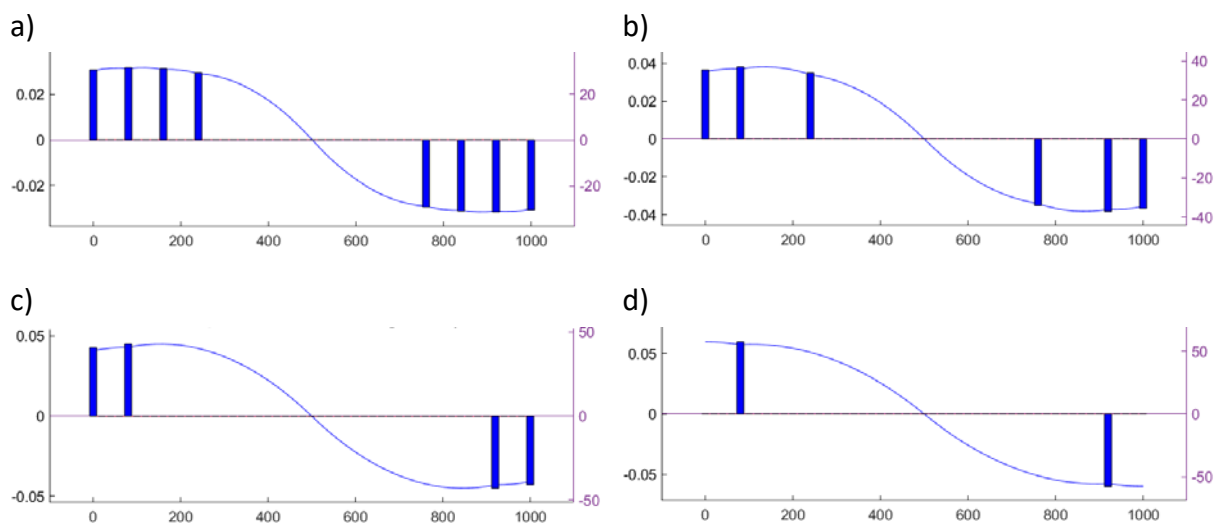


Abbildung 4-11: Schlupfverlauf und Dübelkraft für eine beispielhafte Ausfallreihenfolge

Für diese möglichen Lastverteilungen werden die Einzelwahrscheinlichkeiten bestimmt. Mit dem Konzept der Hyperwürfel werden die im Versagensbereich liegenden Wahrscheinlichkeiten aufsummiert und somit die Systemversagenswahrscheinlichkeit bestimmt.

4.2.7.1 Wahl der Last

Für das klassische Daniels-System wird die Last zu $s = n \cdot (\mu - a \cdot \sigma)$ angenommen, d.h. proportional zu n . Im Fall des Stabwerkmodells besteht jedoch kein proportionaler Zusammenhang zwischen der Auflast F , der Dübelkraft P und der Anzahl n . Die Last F soll so gewählt werden, dass die Zielzuverlässigkeit β_1 für ein Verbundmittel, also $n = 1$, erreicht wird. Für diese Betrachtung kann das am niedrigsten oder am höchsten belastete Verbund-

mittel oder ein Mittelwert verwendet werden. Diese drei möglichen Annahmen führen zu unterschiedlichen Ergebnissen.

4.2.7.2 Parameterstudien

Es wurden Parameterstudien durchgeführt, in denen die Zielzuverlässigkeit β_1 , der Variationskoeffizient var , der Dübelabstand e_x sowie die Anzahl n der Verbundmittel variiert wurde. Ausgegeben wurden die Systemzuverlässigkeit β_{sys} sowie die Trägerbelastung F in Abhängigkeit der Anzahl der Verbundmittel. Betrachtet wurde zudem der Unterschied zwischen dem am niedrigsten („min“) und am höchsten („max“) belasteten Dübel sowie eines Mittelwertes („mean“) als Referenz für die Wahl der Einwirkung. Zunächst wurde eine Parameterstudie mit der Zielzuverlässigkeit β_1 durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4-12 zu sehen.

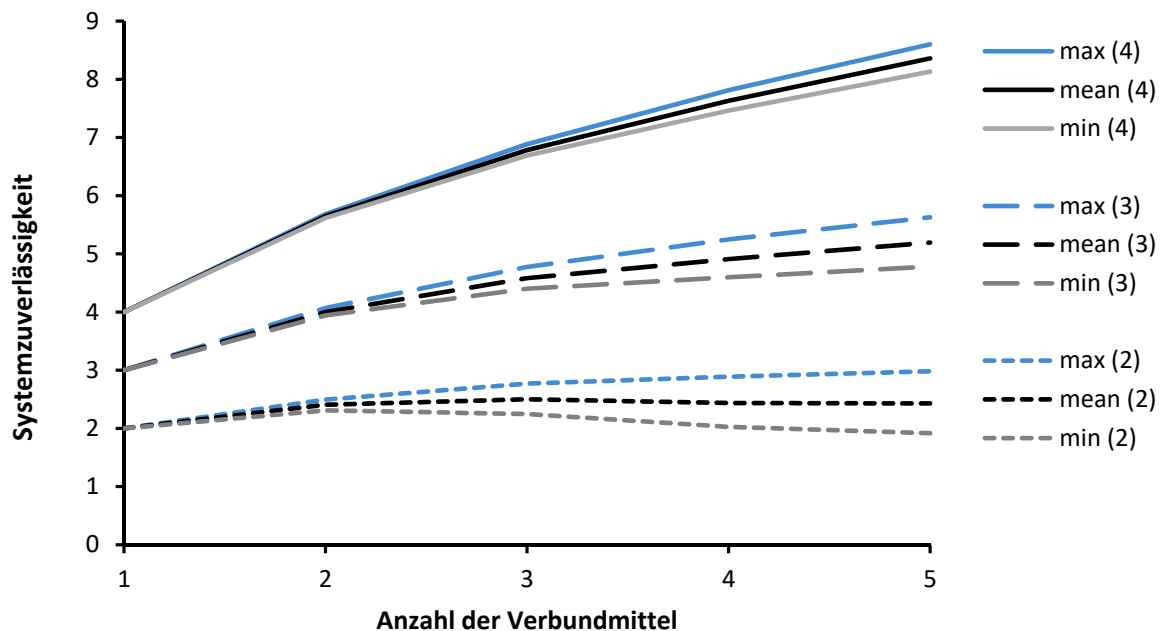


Abbildung 4-12: Parameterstudie zur Zielzuverlässigkeit β_1 ($var = 0,2$; $e_x = 40$ cm) über Anzahl der Verbundmittel

Je höher die Zielzuverlässigkeit für $n = 1$, desto schneller steigt die Zuverlässigkeit mit steigender Anzahl an Verbundmitteln. Für $\beta_1 = 2$ ist, im Vergleich zu den höheren Sicherheitsindizes, nur ein sehr geringer Anstieg der Zuverlässigkeit zu erkennen. Für den Fall „min“ sinkt die Zuverlässigkeit sogar ab $n = 3$. Grund dafür ist, dass bei der Wahl des am niedrigsten belasteten Dübels als Referenz andere, höher belastete Dübel überproportional beansprucht werden und die Versagenswahrscheinlichkeit damit steigt. Der Bemessungspraxis entspricht eher die Wahl des höchstbelasteten Dübels zum Vergleich mit den einwirkenden Kräften. Im Folgenden werden daher die Ergebnisse für den höchstbelasteten Dübel („max“) vorgestellt. Neben der Zielzuverlässigkeit wurde der Variationskoeffizient var variiert. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4-13 zu sehen.

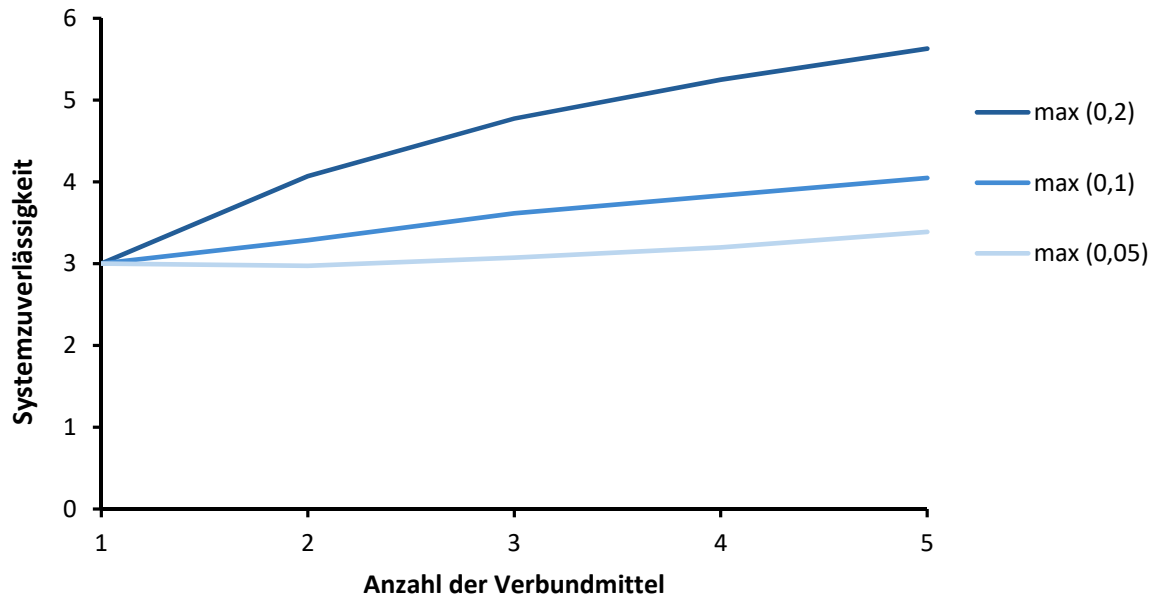


Abbildung 4-13: Parameterstudie zum Variationskoeffizienten var ($\beta_1 = 3$; $e_x = 40$ cm) über Anzahl der Verbundmittel

Je höher der Variationskoeffizient ist, desto schneller steigt die Systemzuverlässigkeit mit steigender Anzahl an Verbundmitteln. Die Last wird so gewählt, dass für $n = 1$ die Zielzuverlässigkeit erreicht wird. Daher sinkt mit einem höheren Variationskoeffizienten und sonst gleichen Parametern die einwirkende Last und der Sicherheitsindex nimmt zu. Ebenfalls wurde der Dübelabstand e_x variiert. Die verschiedenen Dübelabstände sind für das Beispiel $n = 5$ in Abbildung 4-14 zu sehen.

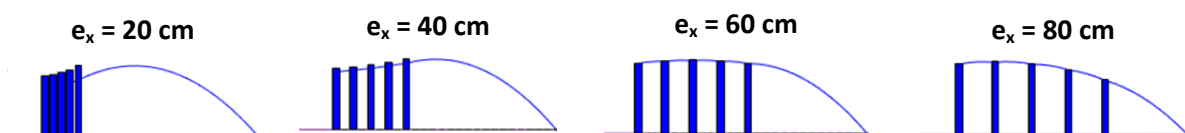


Abbildung 4-14: Verschiedene Dübelabstände für den Fall $n = 5$

In Abbildung 4-15 ist die Systemzuverlässigkeit für verschiedene Dübelabstände für den am niedrigsten („min“) und den am höchsten („max“) belasteten Dübel dargestellt.

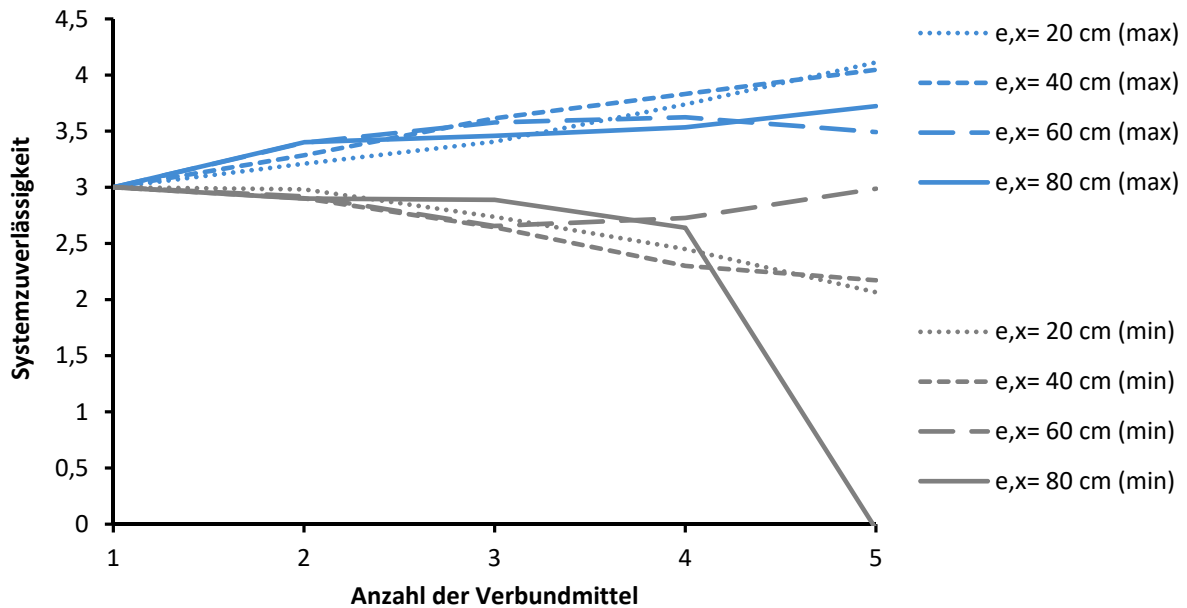


Abbildung 4-15: Parameterstudie zum Dübelabstand e_x ($\beta_1 = 3$; $var = 0,2$) über Anzahl der Verbundmittel

Für beide Fälle sind Schwankungen abhängig vom Dübelabstand erkennbar. Es gibt jedoch keinen eindeutigen Zusammenhang zwischen Dübelabstand und Sicherheitsindex wie bei den Parameterstudien zu β_1 und var . Die Verteilung der Dübelkräfte spielt hier eine wichtige Rolle. Wie in Abbildung 4-14 zu sehen, können die Dübelkräfte sowohl ähnliche Werte annehmen als auch große Abweichungen aufweisen. Je größer dieser Unterschied zwischen minimal und maximal belastetem Dübel ist, desto stärker sinkt der Sicherheitsindex für den Fall „min“, siehe Abbildung 4-15.

Für „min“ wird die Last so gewählt, dass für den am geringsten belasteten Dübel ein gegebenes β erreicht wird. Für die anderen Verbundmittel ist somit die Last größer und damit der Sicherheitsindex kleiner. Ist der Unterschied der Dübelkräfte zwischen minimal und maximal belastetem Dübel besonders groß, so wie bspw. für $e_x = 80$ (siehe Abbildung 4-14), fällt dieser Aspekt besonders ins Gewicht. Der Sicherheitsindex des Systems fällt sehr schnell ab. Für den Fall „max“ tritt dieser Effekt nicht auf, da der Sicherheitsindex für alle Dübel größer ist als für den maximal belasteten Dübel. Hier ist für $e_x = 80$ ein Anstieg des Sicherheitsindex zu beobachten. In Abbildung 4-14 ist ein nur sehr geringer Unterschied zwischen den Dübelkräften für $e_x = 60$ auszumachen. Damit sinkt der Sicherheitsindex für den Fall „min“ nicht, sondern steigt sogar leicht an. Die Sicherheitsindizes für „min“ und „max“ weichen nicht so deutlich voneinander ab wie für die anderen betrachteten Fälle. Für steigende n nähern sie sich einander an.

4.2.8 Plastische Grenzzustandsgleichung (FORM)

Mithilfe von FORM kann die Systemzuverlässigkeit bestimmt werden. Dafür muss zunächst eine Grenzzustandsgleichung aufgestellt werden. Wie in Kapitel 4.2.7 gehen auch in dieser Methode konkrete Zahlenwerte eines Verbundträgers mit ein. Es wird eine Grenzzustandsfunktion für die plastische Momententragfähigkeit eines Verbundträgers aufgestellt:

$$g = M_{pl,R} - M_{Ed} \quad (4.11)$$

Für die Bestimmung des plastischen Widerstandsmomentes des Verbundquerschnitts $M_{pl,Rd}$ werden einige Annahmen getroffen. Zum einen wird, wie in den anderen Beispielen auch, ein symmetrischer Lastfall betrachtet, der im Querschnitt eine reine Biegebeanspruchung hervorruft. Es werden zudem nur Fälle betrachtet, in denen eine teilweise Verdübelung gegeben ist. In allen anderen Fällen ist die Anzahl der Verbundmittel für die Berechnung von $M_{pl,R}$ nicht relevant. Die plastische Nulllinie des Querschnitts wird als im Steg liegend angenommen. Abbildung 4-16 zeigt schematisch die Berechnung von $M_{pl,R}$ für die genannten Annahmen.

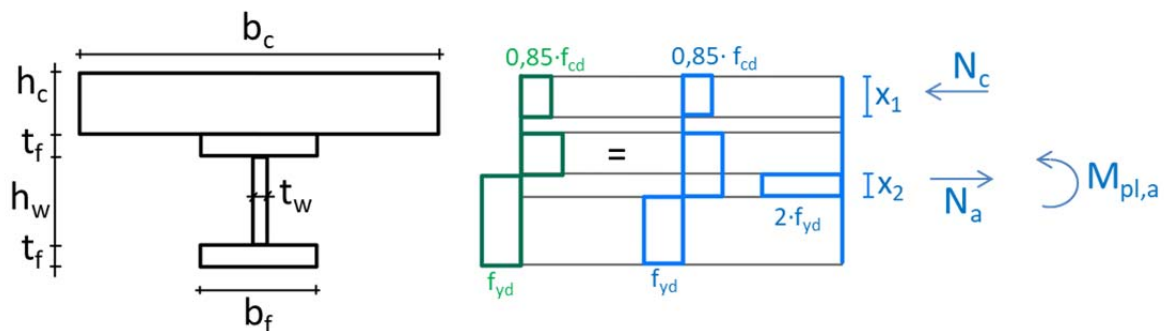


Abbildung 4-16: Berechnung des plastischen Widerstandsmomentes $M_{pl,R}$ für einen Träger unter reiner Biegebeanspruchung

Die im Querschnitt wirkenden Kräfte und Momente berechnen sich zu:

$$N_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_c \cdot x_1 = \sum P_i \quad (4.12)$$

$$N_a = (2 \cdot f_{yd}) \cdot t_w \cdot x_2 = \sum P_i \quad (4.13)$$

$$M_{pl,a} = W_{pl,a} \cdot f_{yd} \quad (4.14)$$

Mit diesen Werten werden die eingezeichneten geometrischen Größen zu

$$x_1 = \frac{\sum P_i}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_c} \quad (4.15)$$

$$x_2 = \frac{\sum P_i}{2 \cdot f_{yd} \cdot t_w} \quad (4.16)$$

bestimmt. Damit die beschriebenen Rechnungen im Definitionsbereich liegen und die Annahme einer teilweisen Verdübelung gegeben ist müssen folgende Grenzwerte eingehalten werden:

$$x_1 \leq h_c \quad (4.17)$$

$$x_2 \leq \frac{h_w}{2} \quad (4.18)$$

Der Hebelarm z berechnet sich zu:

$$z = \frac{h_a}{2} + h_c - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} \quad (4.19)$$

Anhand der beschriebenen Berechnung ergibt sich beispielhaft für einen Einfeldträger der Länge l mit mittiger Einzellast F folgende Grenzzustandsgleichung:

$$\begin{aligned} g &= M_{pl,R} - \frac{F_d \cdot l}{4} \\ &= W_{pl,a} \cdot f_{yd} + \sum_{i=1}^n P_i \cdot \left(\frac{h_a}{2} + h_c - \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{2 \cdot b_c \cdot f_{cd}} - \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{2 \cdot 2 \cdot f_{yd} \cdot t_w} \right) - \frac{F_d \cdot l}{4} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Wichtig ist hier, dass $\sum_{i=1}^n P_i$ und nicht $n \cdot P_i$ verwendet wird. Die Formulierung mit $n \cdot P_i$ entspricht der Betrachtung für vollkorrelierte Dübeltragfähigkeiten. Es wird nur eine Zufallsvariable genutzt und mit der Anzahl n multipliziert. Im anderen Fall werden n Zufallsvariablen aufaddiert. Über diese Grenzzustandsgleichung kann dann mithilfe von FORM die Systemzuverlässigkeit bestimmt werden. Dies geschieht über eine FORM-MATLAB-Anwendung der TU München [21, 22]. Neben dem unkorrelierten kann auch der korrelierte Fall berücksichtigt werden.

Im Folgenden wird das Vorgehen beispielhaft für einen Einfeldträger beschrieben. Die Wahl der Belastung wird anhand einer „Handbemessung“ durchgeführt, sodass $M_{Ed} = M_{pl,Rd}$ gilt. Die in der Bemessung verwendeten Teilsicherheitsbeiwerte γ_V , γ_a , γ_C und γ_G bleiben in den Rechnungen konstant. Eingangswerte sind die Querschnittswerte des Verbundträgers sowie die Anzahl n der Verbundmittel. Mithilfe der oben genannten Bedingungen für x_1 und x_2 wird die maximale Dübelanzahl n_{max} bestimmt, bis zu der eine teilweise Verdübelung gegeben ist. An Materialkennwerten werden Streckgrenze f_y und Betonfestigkeit f_c angegeben. Zudem werden der Mittelwert μ_{P_R} und der Variationskoeffizient var_{P_R} der Dübeltragfähigkeit P_R angegeben. Mithilfe dieser Angaben und des Teilsicherheitsbeiwerts wird der Bemessungswert der Dübeltragfähigkeit berechnet:

$$P_{Rd} = \frac{\mu_{P_R} - 1,645 \cdot (\text{var}_{P_R} \cdot \mu_{P_R})}{\gamma_V} \quad (4.21)$$

Mit den Querschnitts- und Materialkennwerten wird der Bemessungswert des Widerstandes R_d bestimmt. Für den hier betrachteten Fall einer Einzellast in Feldmitte stellt R_d die maximale Einzellast dar, die von dem betrachteten Träger abgetragen werden kann.

$$R_d = \frac{4 \cdot M_{pl,Rd}}{L_{ges}} \quad (4.22)$$

$$\text{mit } M_{pl,Rd} = W_{pl,a} \cdot f_{yd} + n \cdot P_{Rd} \cdot \left(\frac{h_a}{2} + h_c - \frac{n \cdot P_{Rd}}{2 \cdot b_c \cdot f_{cd}} - \frac{n \cdot P_{Rd}}{2 \cdot 2 \cdot f_{yd} \cdot t_w} \right) \quad (4.23)$$

Für die Grenzzustandsgleichung (4.20) wird die Dübeltragfähigkeit P_R als normalverteilt angenommen. Mithilfe des FORM-Tools wird für diese Gleichung der Sicherheitsindex bestimmt. Der Wert der Einwirkung F_d wird für jeden Wert von n neu berechnet. Dafür wird jeweils der maximale Widerstand R_d für $n \cdot P_{Rd}$ ermittelt. Mit der Einwirkung $F_d = R_d$ wird anschließend der Sicherheitsindex β für die Grenzzustandsgleichung (4.20) bestimmt. Dessen Verlauf über die Anzahl der Verbundmittel ist in Abbildung 4-17 für den unkorrelierten Fall sowie für die Berücksichtigung zweier verschiedener Korrelationskoeffizienten dargestellt.

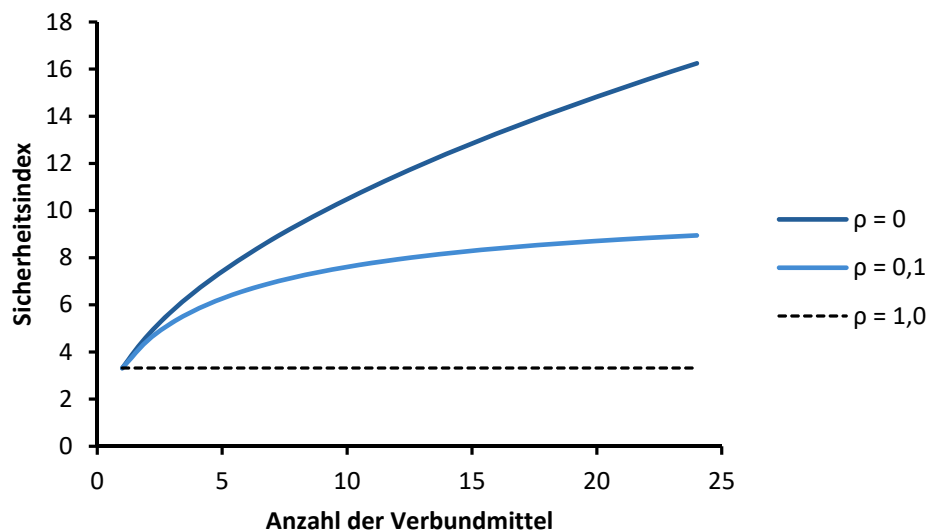


Abbildung 4-17: Verlauf des Sicherheitsindexes für den unkorrelierten und zwei korrelierte Fälle ($\rho = 0,1$, $\rho = 1,0$) über Anzahl der Verbundmittel

Es ist erkennbar, dass der Sicherheitsindex mit zunehmender Anzahl an Verbundmitteln immer weiter ansteigt. Die Berücksichtigung eines Korrelationskoeffizienten führt, analog zu den bereits betrachteten Modellen, zu einem geringeren Anstieg des Sicherheitsindexes. Für den

vollkorrelierten Fall ($\rho = 1,0$) bleibt der Sicherheitsindex über die Anzahl der Verbundmittel konstant.

4.3 Vergleich der verschiedenen Modelle

Der Sicherheitsindex soll für die einzelnen Modelle unter Verwendung der gleichen Eingangsparameter verglichen werden. Die Modelle für die ungleiche Lastverteilung (Abschnitt 4.2.7) sowie für die plastische Grenzzustandsgleichung (Abschnitt 4.2.8) können dabei nicht berücksichtigt werden.

Für den Vergleich wird ein Einfeldträger mit einer Länge von $L = 1000 \text{ cm}$ und einer mittig angreifenden Einzellast F betrachtet. Diese wird jeweils als deterministisch angenommen, da ansonsten die Seriensysteme in dem Vergleich nicht berücksichtigt werden können. Sie wird jeweils so angepasst, dass der Sicherheitsindex für den äußersten Dübel bei $\beta_1 = 3,8$ liegt. Die Einwirkung auf die Dübel wird mithilfe der theoretischen Schlupffunktion bestimmt. Der in dieser enthaltene Beiwert α_s enthält den Dübelabstand e_x und, für einen gleich langen Träger wie in diesem Beispiel, somit auch indirekt die Dübelanzahl n . Für die Berechnung der Sicherheitsindizes wird der Einfachheit halber die Einwirkung auf die Dübel durch $k_i \cdot F$ beschrieben. Dabei enthält der Faktor k_i den Beiwert α_s . Die Schlupffunktion für einen Einfeldträger mit mittiger Einzellast lautet [7]:

$$\delta(x_1) = \frac{\beta_s \cdot F}{2 \cdot \alpha_s^2} \cdot \left[1 - \frac{\cosh \left[\alpha_s \cdot \left(x_1 - \frac{L}{2} \right) \right]}{\cosh \left(\frac{L}{2} \cdot \alpha_s \right)} \right] = k_i \cdot F \quad (4.24)$$

Lediglich beim modifizierten Seriensystem gehen die Werte aller Dübel ein. Für die anderen Modelle wird nur der Wert für den äußersten Dübel betrachtet. Für diesen gilt:

$$\delta \left(x_1 = \frac{L}{2} \right) = \frac{\beta_s \cdot F}{2 \cdot \alpha_s^2} \cdot \left[1 - \frac{1}{\cosh \left(\frac{L}{2} \cdot \alpha_s \right)} \right] = k_{\text{außen}} \cdot F \quad (4.25)$$

Durch Verwendung der Schlupffunktion müssen realistische Dübelabstände und eine dementsprechende Dübelanzahl gewählt werden. Für den untersuchten Träger werden nach dieser Bedingung Dübelanzahlen von $n = 21$ bis $n = 67$ gewählt. Die Dübelabstände variieren so zwischen $e_x = 50 \text{ cm}$ und $e_x = 15,15 \text{ cm}$. Aus diesem Grund können auch die Modelle mit ungleicher Lastverteilung und mit Lösung über FORM nicht berücksichtigt werden. Das Modell mit ungleicher Lastverteilung ist durch Rechenkapazitäten auf $n \leq 6$ begrenzt. Für die Grenzzustandsgleichung ist eine Maximalanzahl von Dübeln gegeben, die hier überschritten würde.

Für die Dübeltragfähigkeit wird der Mittelwert $\mu_{P_R} = 100$, der Variationskoeffizient $var_{P_R} = 0,1$ und für den korrelierten Fall zusätzlich der Korrelationskoeffizient $\rho = 0,1$ ver-

wendet. Im Folgenden sind alle in diesem Vergleich betrachteten Modelle sowie die jeweilige Berechnung des Sicherheitsindex β aufgeführt.

Das ideal-spröde System mit Berücksichtigung eines Dübels, nach Abschnitt 4.2.1:

$$\beta = \frac{\mu_{PR} - (k_{au\beta en} \cdot F)}{\sigma_{PR}} \quad (4.26)$$

Das klassische Seriensystem, nach Abschnitt 4.2.2:

$$P_f = 1 - \left[1 - \frac{\mu_{PR} - (k_{au\beta en} \cdot F)}{\sigma_{PR}} \right]^n \quad (4.27)$$

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (4.28)$$

Das modifizierte Seriensystem, nach Abschnitt 4.2.2:

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\mu_{PR} - (k_i \cdot F)}{\sigma_{PR}} \right) \quad (4.29)$$

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (4.30)$$

Das Daniels-System, nach Abschnitt 4.2.3:

$$\beta = \frac{E_n - (k_{au\beta en} \cdot F)}{D_n} \quad (4.31)$$

Das ideal-plastische System, nach Abschnitt 4.2.4:

$$\beta = \sqrt{n} \cdot \frac{\mu_{PR} - (k_{au\beta en} \cdot F)}{\sigma_{PR}} \quad (4.32)$$

Das ideal-plastische System mit Korrelation der Widerstände, nach Abschnitt 4.2.5:

$$\beta = \sqrt{n} \cdot \frac{\mu_{PR} - (k_{au\beta en} \cdot F)}{\sigma_{PR}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \rho \cdot (n - 1)}} \quad (4.33)$$

In Abbildung 4-18 ist der Verlauf des Sicherheitsindex β über die Anzahl n der Stäbe für die verschiedenen Modelle zu sehen.

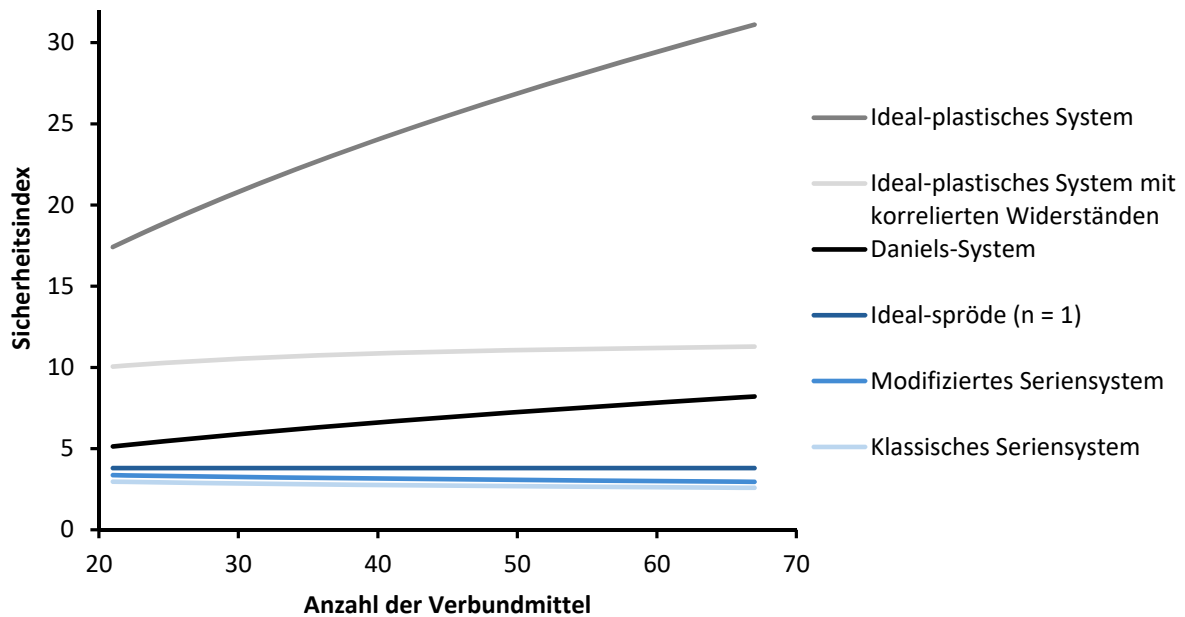


Abbildung 4-18: Sicherheitsindex β über Anzahl der Verbundmittel für verschiedene Modelle

Hier fällt besonders das ideal-plastische System auf, für das der Sicherheitsindex mit zunehmendem n deutlich stärker ansteigt als für alle anderen Modelle. Die Berücksichtigung der Korrelation mit $\rho = 0,1$ hat bereits einen deutlich erkennbaren Einfluss. Bei Annahme einer vollen Korrelation verhielte sich der Sicherheitsindex wie der für das System mit nur einem Verbundmittel, bliebe also konstant über n . Für die genauere Betrachtung der restlichen Systeme sind diese nochmals in Abbildung 4-19 ohne die beiden ideal-plastischen Systeme dargestellt.

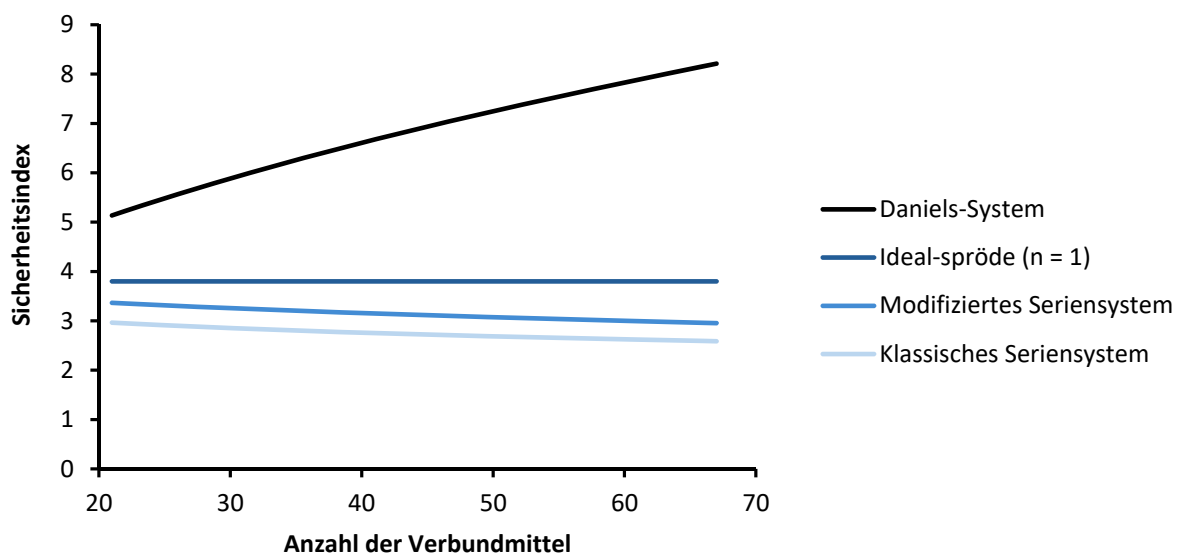


Abbildung 4-19: Sicherheitsindex β über Anzahl der Verbundmittel für verschiedene Modelle (Ausschnitt)

Für die beiden Seriensysteme sinkt der Sicherheitsindex. Für das klassische System wird angenommen, dass jeder im Träger vorhandene Dübel die gleiche Beanspruchung erfährt wie der äußerste. Mit Anzahl an Dübeln werden immer mehr Versagenswahrscheinlichkeiten berücksichtigt. Daher sinkt der Sicherheitsindex für steigende n . Auch für das modifizierte Seriensystem ist dieser Trend erkennbar, jedoch liegt der Sicherheitsindex immer etwas über dem des klassischen Seriensystems. Für das modifizierte System werden die berechneten Belastungen und Versagenswahrscheinlichkeiten aller Dübel berücksichtigt. Diese liegen unter den Werten für den äußersten Dübel, die für das klassische System verwendet werden. Jedoch werden auch hier mit steigendem n immer mehr Versagensmöglichkeiten hinzugefügt und der Sicherheitsindex sinkt dementsprechend. Für die hier gewählte Vorgehensweise ist die Annahme eines Seriensystems, unabhängig davon, ob klassisch oder modifiziert, nicht sinnvoll. Das modifizierte System ist allerdings dazu geeignet zu zeigen, dass sich der Sicherheitsindex bei einem vorgegebenen Träger mit fester Dübelanzahl einem Grenzwert nähert. Dies ist in Abschnitt 4.2.2 geschehen.

Der Verlauf bei Betrachtung von nur einem Dübel ist in diesem Beispiel konstant. Der vorher (siehe Abschnitt 4.2.1) beschriebene Effekt durch den im Beiwert enthaltenen Faktor n fließt hier nicht mit ein. Der äußerste Dübel wird für die Festlegung der Last F zum Erreichen eines konstanten Sicherheitsindex verwendet und weist daher immer ebendiesen Sicherheitsindex auf.

Für das ideal-spröde Daniels-System steigt der Sicherheitsindex mit steigender Anzahl an Verbundmitteln. Wie auch für das klassische Seriensystem wird hierbei die Last für alle Dübel gleich angenommen. Jedoch greift hier der Effekt eines Daniels-Systems, dass bei Versagen eines Dübels die Last von den anderen abgetragen werden kann. Bei diesem System muss jedoch einerseits beachtet werden, dass die Anordnung der Dübel keine Auswirkungen hat. Die Last eines versagten Dübels wird gleichmäßig auf alle anderen Dübel verteilt. Für einen Verbundträger ist diese Annahme jedoch nicht realitätsnah. Die Last eines versagten Dübels verteilt sich nicht auf alle, sondern nur auf die umliegenden Dübel. Andererseits ist die Annahme eines ideal-spröden Verhaltens der Dübel durchaus als konservativ zu bewerten.

5 Anwendung auf Teilsicherheitsbeiwerte

An dieser Stelle soll eine Möglichkeit beschrieben werden, die erhöhten Sicherheitsindizes in die Bemessung einfließen zu lassen. Geschehen soll dies über den Teilsicherheitsbeiwert γ_R , der den charakteristischen Wert des Widerstandes R_k abmindert. Für den Verbundbau wird dieser Beiwert zu $\gamma_v = 1,25$ angesetzt. Es soll gezeigt werden, dass auch ein geringerer Teilsicherheitsbeiwert die geforderten Sicherheiten gewährleisten kann.

5.1 Allgemeines

In der Bemessung nach Eurocode (siehe Kapitel 2.3.4) wird der Bemessungswert der Längsschubkrafttragfähigkeit eines Verbundmittels bestimmt über:

$$P_{Rd} = \frac{P_{Rk}}{\gamma_v} \quad (5.1)$$

mit $\gamma_v = 1,25$

Im Folgenden werden für den Widerstand, den Bemessungswert und die Einwirkung die allgemeinen Bezeichnungen R_k , R_d und E_d verwendet. Bei der Bestimmung des Sicherheitsindex wird die Last deterministisch angenommen zu:

$$s = n \cdot (\mu_R - a \cdot \sigma_R) \quad (5.2)$$

Durch die Bemessung nach Eurocode wird ein bestimmter Sicherheitsindex, hier β_{EC} genannt, erreicht. In den meisten Fällen beträgt dieser Wert etwa 3,8. Empfohlene Mindestwerte nach Eurocode finden sich in Tabelle 2-1. Für den Bemessungszustand gilt:

$$\frac{R_k}{\gamma_R} = R_d = E_d = \frac{s}{n} = (\mu_R - \beta_{EC} \cdot \sigma_R) \quad (5.3)$$

Der charakteristische Wert des Widerstandes R_k ist eine feste Größe. Der Wert entspricht dem 5 %-Quantilwert der Verteilung:

$$R_k = \mu_R + \Phi^{-1}(0,05) \cdot \sigma_R \approx \mu_R - 1,645 \cdot \sigma_R \quad (5.4)$$

Somit lässt sich der normative Teilsicherheitsbeiwert γ_R ausdrücken durch:

$$\gamma_R = \frac{\mu_R - 1,645 \cdot \sigma_R}{\mu_R - \beta_{EC} \cdot \sigma_R} \quad (5.5)$$

5.2 Ideal plastische Systeme

Für die ideal-plastischen Systeme kann der Sicherheitsindex β theoretisch hergeleitet werden. Daher kann auch ein neuer Teilsicherheitsbeiwert γ_R^* für die Bemessung theoretisch hergeleitet werden. Im Folgenden wird dies durchgeführt und für ein Zahlenbeispiel die Entwicklung des Teilsicherheitsbeiwertes vorgestellt.

5.2.1 Theoretische Herleitung

Der Sicherheitsindex nach Eurocode β_{EC} eines Systems bei einer Einwirkung s wird an der Verteilung des Widerstandes mit dem Mittelwert μ_R und der Standardabweichung σ_R bestimmt. Eine grafische Darstellung findet sich in Abbildung 5-1 links.

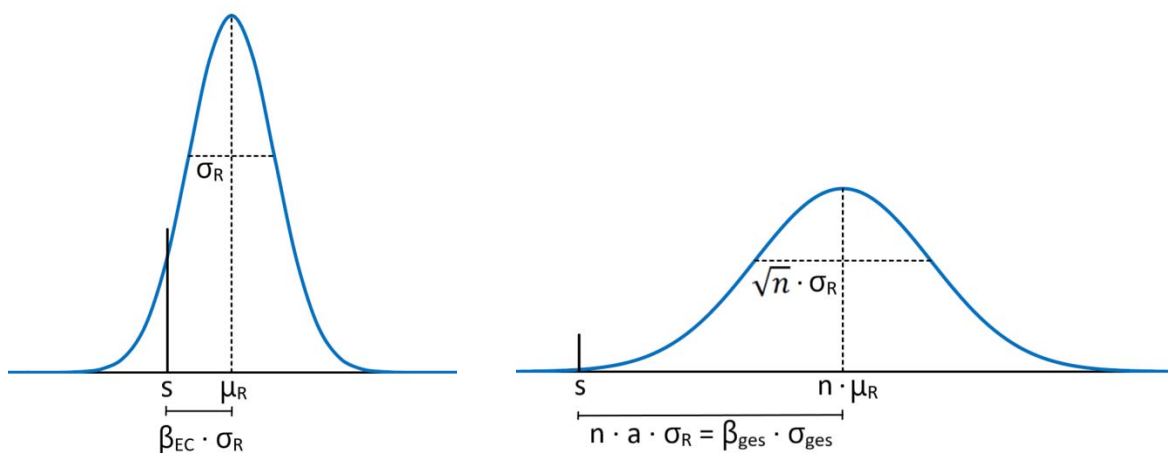


Abbildung 5-1: Normalverteilungen für $n = 1$ (links) und ideal-plastische Systeme (rechts)

Für das ideal plastische System ist der Widerstand als lineare Kombination der normalverteilten Widerstände ebenfalls normalverteilt. Diese Verteilung, nachfolgend Gesamtverteilung genannt, ist definiert über den Mittelwert $\mu_{ges} = n \cdot \mu_R$ und die Standardabweichung $\sigma_{ges} = \sqrt{n} \cdot \sigma_R$, siehe Abbildung 5-1 rechts.

Bei der Bestimmung des Sicherheitsindex wird die Last s deterministisch angenommen zu:

$$s = n \cdot (\mu_R - \beta_{EC} \cdot \sigma_R) = n \cdot \mu_R - n \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R \quad (5.6)$$

Für die Gesamtverteilung wird der Sicherheitsindex des Systems unter dieser Last s wie folgt bestimmt:

$$\beta_{ges} \cdot \sigma_{ges} = \beta_{ges} \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma_R = n \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R \quad (5.7)$$

$$\beta_{ges} = \sqrt{n} \cdot \beta_{EC} \quad (5.8)$$

Der Sicherheitsindex steigt somit mit steigender Anzahl n an Stäben. Ziel ist es nun, für das ideal-plastische System den Sicherheitsindex β_{EC} für alle n zu erreichen. Der Sicherheitsin-

dex an der Gesamtverteilung soll somit konstant gehalten werden. Daraus ergibt sich, dass die Einwirkung s verändert wird. Für diese über n veränderliche Last s^* gilt:

$$s^* = \mu_{ges} - \beta_{EC} \cdot \sigma_{ges} = n \cdot \mu_R - \beta_{EC} \cdot (\sqrt{n} \cdot \sigma_R) \quad (5.9)$$

$$s^* = n \cdot \left(\mu_R - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R \right) \quad (5.10)$$

Eine weitere Möglichkeit s^* zu ermitteln führt über den Sicherheitsindex β . Für ein idealplastisches System lautet dieser nach Kapitel 3.3.1 wie folgt:

$$\beta = \frac{n \cdot \mu_R - s}{\sqrt{n} \cdot \sigma_R} \quad (5.11)$$

Soll nun der Sicherheitsindex über n konstant bleiben, bspw. $\beta = konst. = \beta_{EC}$, muss die Last angepasst werden. Damit ergibt sich das gleiche Ergebnis wie in Gleichung (5.10):

$$\beta_{EC} = \frac{n \cdot \mu_R - s^*}{\sqrt{n} \cdot \sigma_R} \quad (5.12)$$

$$\Leftrightarrow s^* = n \cdot \left(\mu_R - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R \right) \quad (5.13)$$

Über diesen Ansatz kann die veränderliche Last s^* auch für den korrelierten Fall hergeleitet werden:

$$\beta_{EC} = \frac{n \cdot \mu_R - s^*}{\sigma_R \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \rho \cdot (n - 1)}} \quad (5.14)$$

$$\Leftrightarrow s^* = n \cdot \left(\mu_R - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R \cdot \sqrt{1 + \rho \cdot (n - 1)} \right) \quad (5.15)$$

Die folgenden Berechnungen werden für den unkorrelierten Fall durchgeführt. Die Vorgehensweise für den korrelierten Fall ist analog.

Weiterhin soll nicht die Einwirkung, sondern der Widerstand verändert werden. Da R_k eine feste Größe ist, muss der Teilsicherheitsbeiwert γ_R verändert werden. Bestimmt wird dieser neue Teilsicherheitsbeiwert γ_R^* durch:

$$\frac{R_k}{\gamma_R^*} = \frac{\mu_R - 1,645 \cdot \sigma_R}{\gamma_R^*} = \frac{s^*}{n} = \left(\mu_R - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R \right) \quad (5.16)$$

$$\gamma_R^* = \frac{\mu_R - 1,645 \cdot \sigma_R}{\mu_R - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R} \quad (5.17)$$

Der neue Teilsicherheitsbeiwert γ_R^* lässt sich somit in Abhängigkeit von n und dem geforderten Sicherheitsindex β_{EC} aus dem aktuellen Teilsicherheitsbeiwert γ_R (siehe Gleichung (5.5)) bestimmen:

$$\gamma_R^* = \gamma_R \cdot \frac{\mu_R - \beta_{EC} \cdot \sigma_R}{\mu_R - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R} \quad (5.18)$$

Das Verhältnis zwischen μ_R und σ_R wird durch den Variationskoeffizienten var_R dargestellt:

$$var_R = \frac{\sigma_R}{\mu_R} \quad (5.19)$$

Durch Einsetzen ergibt sich für den neuen Teilsicherheitsbeiwert:

$$\gamma_R^* = \gamma_R \cdot \frac{\mu_R - \beta_{EC} \cdot (var_R \cdot \mu_R)}{\mu_R - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot (var_R \cdot \mu_R)} = \gamma_R \cdot \frac{1 - \beta_{EC} \cdot var_R}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot var_R} \quad (5.20)$$

Somit sind die konkreten Werte für μ_R und σ_R unerheblich, lediglich ihr Verhältnis var_R geht in die Berechnung des Beiwertes ein.

Mit dem Ansatz eines ideal-plastischen Materialmodells ergibt sich, dass sich der Wert der mittleren Festigkeit für steigende n immer weiter dem Mittelwert der Verteilung der Festigkeit μ_R annähert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{R_k}{\gamma_R^*} = \mu_R - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R \right) = \mu_R - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R = \mu_R \quad (5.21)$$

Auf diese Weise zeigt sich, dass der Grenzwert des Teilsicherheitsbeiwertes für $n \rightarrow \infty$ nur vom Variationskoeffizienten var_R abhängt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\gamma_R^* = \frac{\mu_R - 1,645 \cdot \sigma_R}{\mu_R - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R} \right) = 1 - 1,645 \cdot var_R \quad (5.22)$$

Für den korrelierten Fall ergeben sich analog folgende Grenzwerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mu_R - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R \cdot \sqrt{1 + \rho \cdot (n-1)} \right) = \mu_R - \rho \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R \quad (5.23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\gamma_R^* = \frac{\mu_R - 1,645 \cdot \sigma_R}{\mu_R - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{EC} \cdot \sigma_R \cdot \sqrt{1 + \rho \cdot (n-1)}} \right) = \frac{1 - 1,645 \cdot var_R}{1 - \rho \cdot \beta_{EC} \cdot var_R} \quad (5.24)$$

5.2.2 Anwendung auf Modell

Die vorher hergeleiteten Beiwerte werden nun auf die beiden Modelle für ideal-plastisches Verhalten mit und ohne Korrelation der Widerstände angewendet. Eingangsparameter für das Beispiel sind $\mu_R = 100$, $var_R = 0,1$ und für den korrelierten Fall zusätzlich $\rho = 0,1$. Der sich aus der Bemessung nach Eurocode ergebende Sicherheitsindex β_{EC} wurde für $\gamma_R = 1,25$ bestimmt und als Zielwert für das ideal-plastische System verwendet:

$$\beta_{EC} = \frac{\mu_R - \frac{R_k}{\gamma_R}}{\sigma_R} = \frac{\mu_R - \frac{1}{\gamma_R} \cdot (\mu_R - 1,645 \cdot \sigma_R)}{\sigma_R} \quad (5.25)$$

Für dieses Beispiel ergibt sich ein Sicherheitsindex von $\beta_{EC} = 3,32$. Abbildung 5-2 zeigt den Verlauf des neu bestimmten Teilsicherheitsbeiwertes γ_R^* , berechnet nach Gleichung (5.18), über die Anzahl n . Startwert ist der Teilsicherheitsbeiwert $\gamma_R = 1,25$ nach Eurocode.

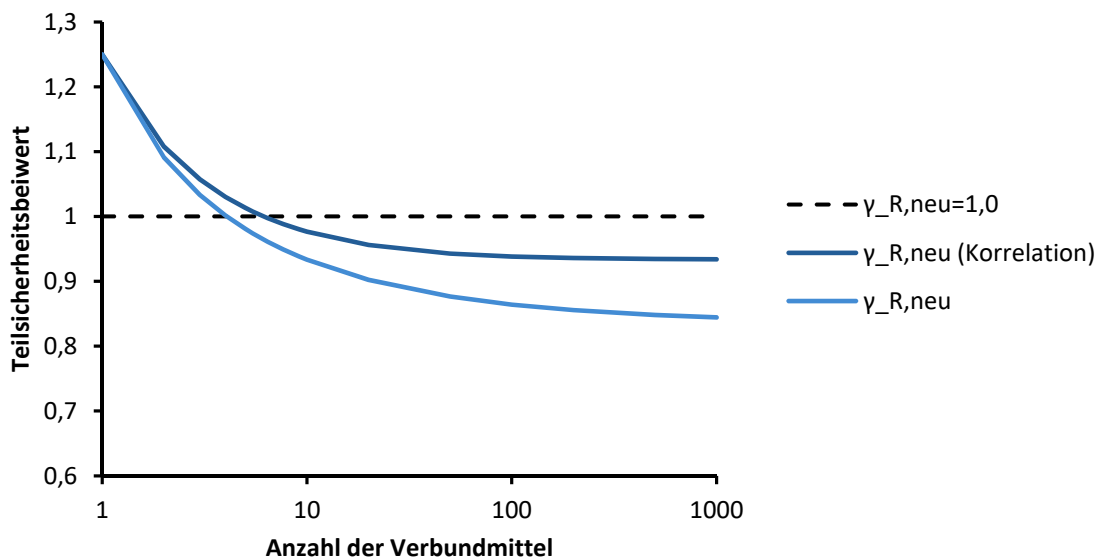


Abbildung 5-2: Verlauf des neu bestimmten Teilsicherheitsbeiwertes γ_R^* über Anzahl der Verbundmittel; logarithmische Darstellung

Es ist erkennbar, dass der Beiwert für den unkorrelierten Fall bereits ab $n = 5$ unter eins liegt. Ab diesem Wert würde R_k nicht abgemindert, sondern vergrößert. Veranschaulicht ist dies in Abbildung 5-3.

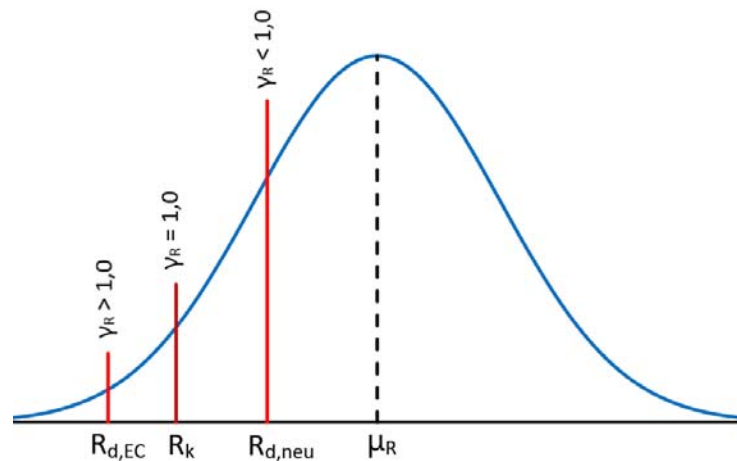


Abbildung 5-3: Bemessungswert R_d für verschiedene Teilsicherheitsbeiwerte γ_R

Für einen Teilsicherheitsbeiwert von $\gamma_R^* = 1,0$ wird die Bemessung mit dem charakteristischen Widerstand durchgeführt. Wird der Teilsicherheitsbeiwert noch weiter abgemindert, nähert er sich immer weiter dem Mittelwert.

Der beschriebene Trend lässt sich gut in Abbildung 5-4 erkennen. Dort ist der Verlauf des mit γ_R^* berechneten Bemessungswertes R_d zu sehen. Für den unkorrelierten Fall nähert sich der Bemessungswert dem Mittelwert $\mu_R = 100$ immer weiter an. Auch für den korrelierten Fall zeichnet sich ein Grenzwert ab. Dieser liegt jedoch aufgrund des Abminderungsfaktors aus der Korrelation (siehe Kapitel 3.4.1, Gleichung (3.24)) unter dem Mittelwert.

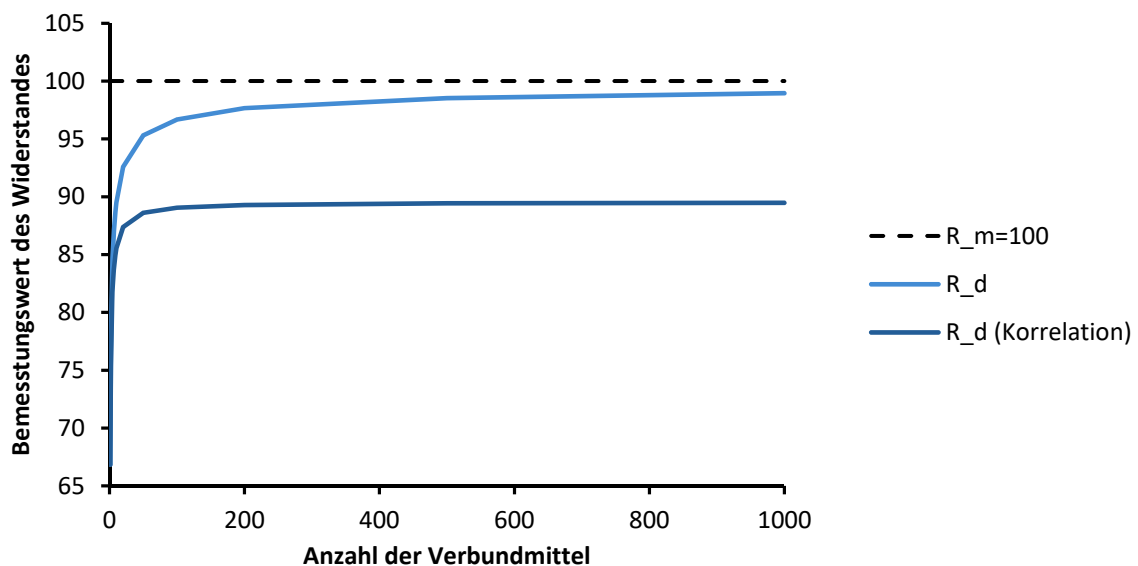


Abbildung 5-4: Verlauf des Bemessungswertes über Anzahl der Verbundmittel

5.3 Plastische Grenzzustandsgleichung (FORM)

Nachdem ein allgemeines ideal-plastisches System betrachtet wurde, sollen jetzt konkrete Werte eines Verbundträgers mit einbezogen werden. Dafür wird die in Kapitel 4.2.8 beschriebene Vorgehensweise genutzt.

5.3.1 Theoretische Überlegungen

Wie auch in Kapitel 4.2.8 wird ein Einfeldträger mit mittig angreifender Einzellast angenommen. Die Grenzzustandsfunktion (siehe Gleichung (4.12)) lautet für einen Verbundträger mit dieser Belastung:

$$g = W_{pl,a} \cdot f_{yd} + \sum_{i=1}^n P_i \cdot \left(\frac{h_a}{2} + h_c - \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{2 \cdot b_c \cdot f_{cd}} - \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{2 \cdot 2 \cdot f_{yd} \cdot t_w} \right) - \frac{F_d \cdot l}{4} \quad (5.26)$$

Wobei die Einwirkung so gewählt wird, dass deren Bemessungswert F_d zu

$$F_d = \left[W_{pl,a} \cdot f_{yd} + n \cdot P_{Rd} \cdot \left(\frac{h_a}{2} + h_c - \frac{n \cdot P_{Rd}}{2 \cdot b_c \cdot f_{cd}} - \frac{n \cdot P_{Rd}}{2 \cdot 2 \cdot f_{yd} \cdot t_w} \right) \right] \cdot \frac{4}{l} \quad (5.27)$$

bestimmt wird.

Für eine Lösung mittels FORM gilt immer $g = 0$. Nach Einsetzen von F_d ergibt sich für das vorliegende Beispiel die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n P_i \cdot \left(\frac{h_a}{2} + h_c \right) - \frac{(\sum_{i=1}^n P_i)^2}{2 \cdot b_c \cdot f_{cd}} - \frac{(\sum_{i=1}^n P_i)^2}{2 \cdot 2 \cdot f_{yd} \cdot t_w} \\ & = n \cdot P_{Rd} \cdot \left(\frac{h_a}{2} + h_c \right) - \frac{(n \cdot P_{Rd})^2}{2 \cdot b_c \cdot f_{cd}} - \frac{(n \cdot P_{Rd})^2}{2 \cdot 2 \cdot f_{yd} \cdot t_w} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Diese ist für $\sum_{i=1}^n P_i = n \cdot P_{Rd}$ immer erfüllt. Damit handelt es sich um ein ideal-plastisches System. Mit steigendem n erhöht der Sicherheitsindex immer weiter.

Hier soll jedoch der Sicherheitsindex konstant bleiben und der Teilsicherheitsbeiwert angepasst werden. Daher wird der Bemessungswert der Dübelkraft P_{Rd} nicht konstant, sondern mithilfe eines veränderlichen Teilsicherheitsbeiwertes γ_V^* angenommen zu:

$$P_{Rd} = \frac{P_{Rk}}{\gamma_V^*} \quad (5.29)$$

Da es sich um ein ideal-plastisches System handelt, gelten auch für dieses Beispiel die Ausführungen aus Abschnitt 5.2. Der neue Teilsicherheitsbeiwert γ_V^* kann daher analog zu Gleichung (5.17) beschrieben werden durch:

$$\gamma_V^* = \frac{\mu_{P_R} - 1,645 \cdot \sigma_{P_R}}{\mu_{P_R} - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{Ziel} \cdot \sigma_{P_R}} = \frac{1 - 1,645 \cdot var_{P_R}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \beta_{Ziel} \cdot var_{P_R}} \quad (5.30)$$

Veränderte Querschnitts- oder Materialparameter sollten daher keinen Einfluss auf den Sicherheitsindex bzw. den Teilsicherheitsbeiwert haben. Nach Gleichung (5.30) sollte, neben dem vorgegebenen Sicherheitsindex, nur der Variationskoeffizient des Widerstandes var_{P_R} eine Änderung des Teilsicherheitsbeiwertes hervorrufen. Über Umformen der Gleichung (5.30) lässt sich ebenfalls der Wert für n berechnen, ab dem der neu berechnete Sicherheitsindex den Wert 1,0 unterschreitet. Dieser Wert ist nur vom geforderten Sicherheitsindex abhängig:

$$n(\gamma_V^* \leq 1) \geq \left(\frac{\beta_{Ziel}}{1,645} \right)^2 \quad (5.31)$$

Für die in Tabelle 2-1 aufgeführten Sicherheitsindizes nach Eurocode sind in der nachstehenden Tabelle 5-1 die Werte für n aufgelistet, für die der Teilsicherheitsbeiwert γ_V^* kleiner eins ist.

Tabelle 5-1: Dübelanzahl n für $\gamma_V^* < 1$ in Abhängigkeit vom Sicherheitsindex

β_{Ziel}	3,3	3,8	4,2	4,3	4,7	5,2
$n(\gamma_V^* \leq 1)$	5	6	7	7	9	10

5.3.2 Numerische Untersuchungen

Mathematisch gesehen ist $\sum_{i=1}^n P_i = n \cdot P_{Rd}$ nicht die einzige Lösung für $g = 0$. Daher werden zur Überprüfung der in Abschnitt 5.3.1 getätigten theoretischen Überlegungen numerische Untersuchungen durchgeführt. Für einen vorgegebenen Sicherheitsindex wird der neue Teilsicherheitsbeiwert γ_V für die Dübeltragfähigkeit P_{Rd} mithilfe von FORM iterativ bestimmt. Im Folgenden wird die numerische Umsetzung beschrieben.

Zunächst wird der Zielwert für den Sicherheitsindex β sowie eine Toleranz angegeben. Für den Teilsicherheitsbeiwert γ_V muss zunächst ein Schätzwert sowie ein Intervall $\Delta\gamma_V$ definiert werden. Mit den Eingangswerten wird dann der Sicherheitsindex β wie oben beschrieben mithilfe von FORM (siehe Kapitel 4.2.8) bestimmt. Liegt dieser nicht im Toleranzbereich des Zielwertes, wird der Wert für γ_V über $\Delta\gamma_V$ angepasst. Mit diesem neuen Beiwert wird P_{Rd} neu berechnet. Mit dem neuen Wert für P_{Rd} ergibt sich auch ein neuer Wert für $M_{pl,Rd}$ und damit für den Gesamtwiderstand R_d . Da die Einwirkung F_d immer an diesen Wert angepasst wird, ändert sich auch dieser Eingangswert für die Grenzzustandsgleichung, siehe Kapitel 4.2.8. Mit den neuen Eingangswerten wird der Sicherheitsindex erneut berechnet. Dieser Vorgang wird so oft wiederholt, bis der Wert für β dem Zielwert entspricht bzw. im Tole-

ranzbereich des Zielwertes liegt. Das Verfahren wird für mehrere n durchgeführt, um den Verlauf des Teilsicherheitsbeiwertes darzustellen, siehe Abbildung 5-5. Im Gegensatz zu den Kurven in Abschnitt 5.2.2 wird hier nicht der Teilsicherheitsbeiwert $\gamma_V = 1,25$ als Startwert gewählt. Stattdessen werden für die oben genannte Grenzzustandsgleichung verschiedene Sicherheitsindizes vorgegeben.

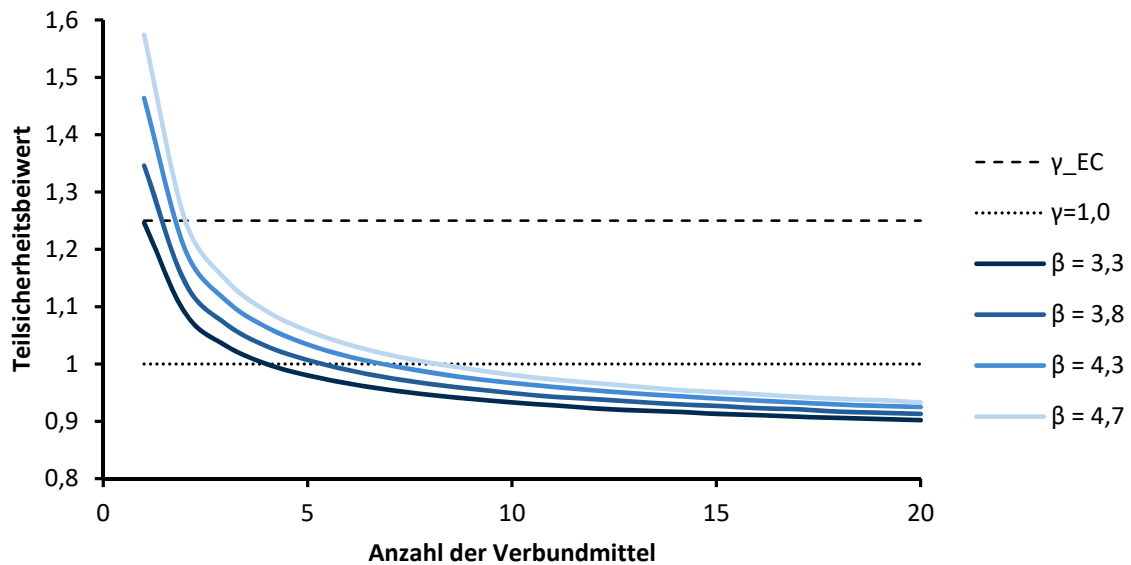


Abbildung 5-5: Entwicklung des Teilsicherheitsbeiwertes γ_V^* über Anzahl der Verbundmittel

Es ist gut zu erkennen, dass der Teilsicherheitsbeiwert auch bei einem relativ hohen Sicherheitsindex von $\beta = 4,7$ bereits ab neun Verbundmitteln unter eins liegt und damit eine Bemessung mit der charakteristischen Dübeltragfähigkeit möglich wäre. Die in Tabelle 5-1 bestimmten Werte konnten durch die numerische Untersuchung bestätigt werden.

Wie im vorherigen Kapitel wird auch der Verlauf von P_{Rd} betrachtet, siehe Abbildung 5-6. Beim Verlauf der Dübeltragfähigkeit P_{Rd} ist auch hier zu erkennen, dass sich der Wert dem Mittelwert nähert.

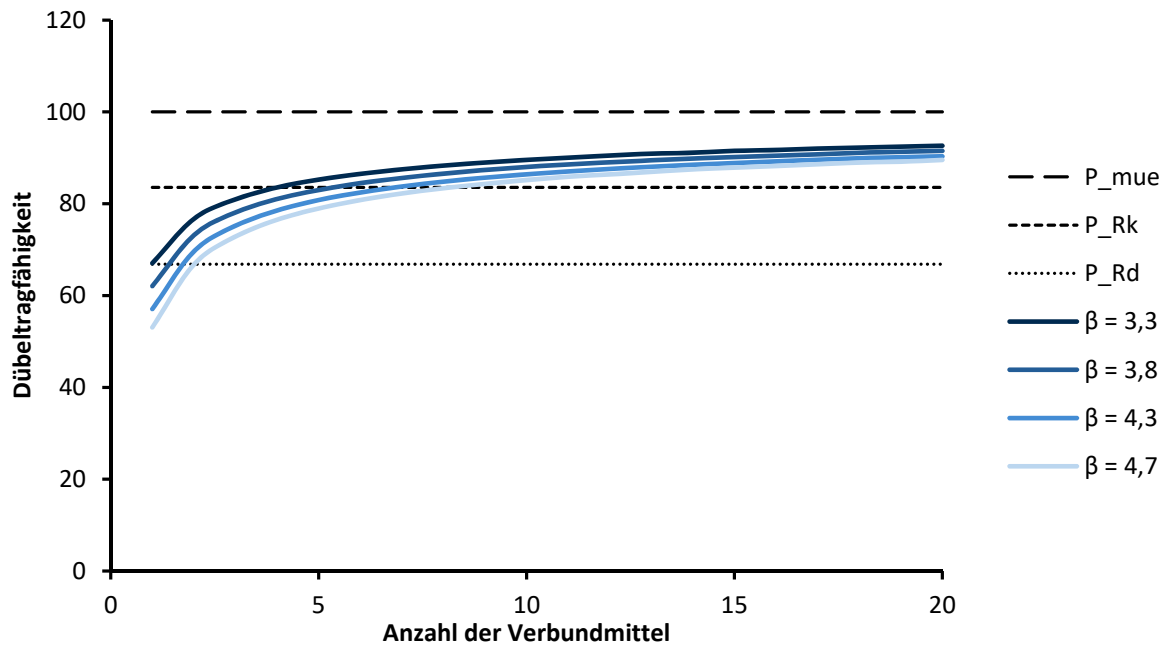


Abbildung 5-6: Entwicklung der Dübeltragfähigkeit P_{Rd} über Anzahl der Verbundmittel

In diesem Beispiel wurde keine Korrelation der Widerstände angesetzt. Diese kann jedoch mit berücksichtigt werden. Für einen steigenden Korrelationskoeffizienten kommt es zu einer immer geringeren Abnahme des Teilsicherheitsbeiwertes. Für einen Korrelationskoeffizienten von $\rho = 1,0$ ist der Teilsicherheitsbeiwert und damit auch die Dübelkraft konstant über die Anzahl der Verbundmittel. Nähere Erläuterungen über den Einfluss des Korrelationskoeffizienten finden sich in Kapitel 3.4.

Weiterhin wurden Parameterstudien bzgl. der Querschnitts- und Materialparameter durchgeführt. Einen Einfluss auf den Verlauf des Teilsicherheitsbeiwertes und der Dübelkraft hat demnach neben dem vorgegebenen Sicherheitsindex lediglich der Variationskoeffizient der Dübeltragfähigkeit. Alle anderen Variationen führten zu den in Abbildung 5-5 und Abbildung 5-6 dargestellten Ergebnissen. Die theoretischen Überlegungen, vgl. Abschnitt 5.3.1, konnten somit bestätigt werden. Der Verlauf des Teilsicherheitsbeiwertes sowie der der Dübelkräfte für verschiedene Variationskoeffizienten sind in Abbildung 5-7 und Abbildung 5-8 dargestellt. In beiden Fällen wurde der Zielwert des Sicherheitsindex zu $\beta = 3,3$ angenommen.

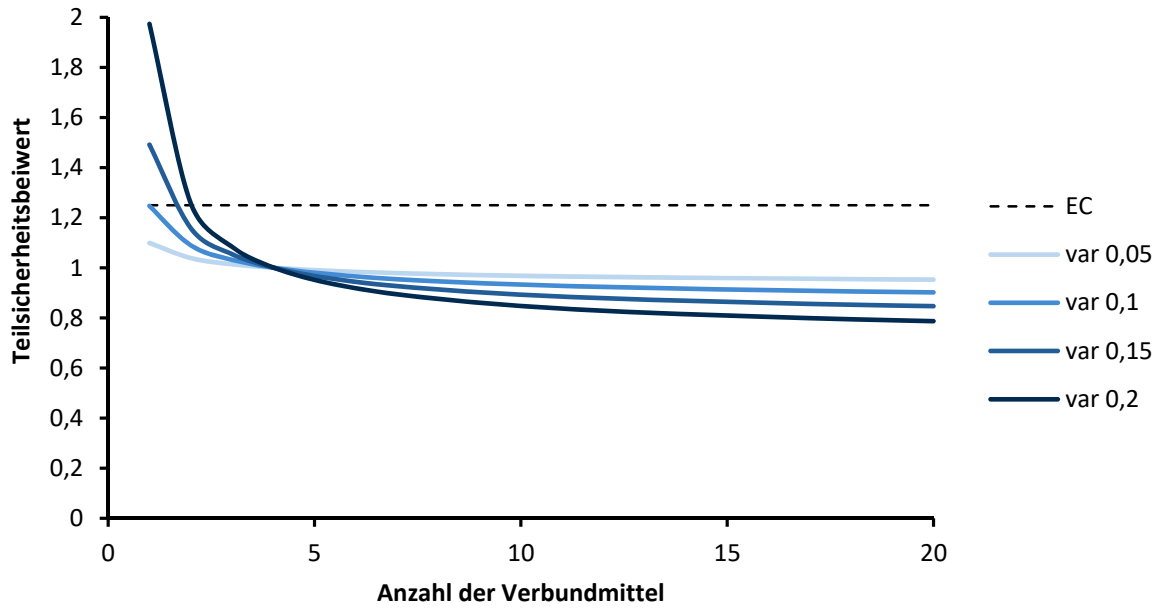


Abbildung 5-7: Entwicklung des Teilsicherheitsbeiwertes γ_V^* über Anzahl der Verbundmittel ($\beta = 3,3$)

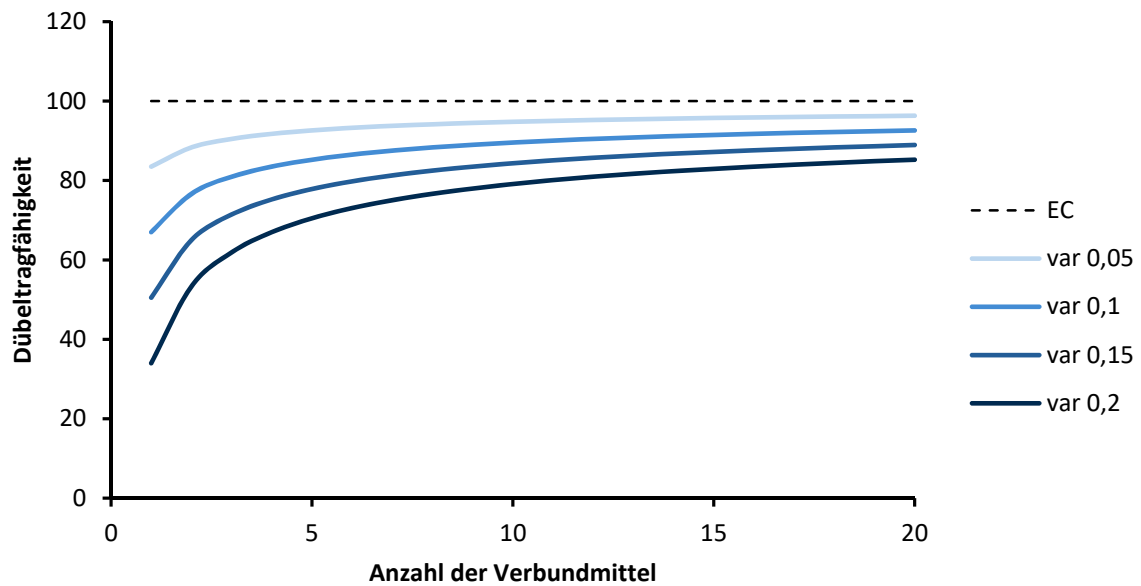


Abbildung 5-8: Entwicklung der Dübeltragfähigkeit über Anzahl der Verbundmittel für verschiedene Variationskoeffizienten ($\beta = 3,3$)

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Masterarbeit wurden verschiedene theoretische Modelle für die Tragfähigkeit und Sicherheit von aus mehreren Komponenten bestehenden Systemen betrachtet und deren Resultate jeweils durch numerische Untersuchungen verifiziert. Anschließend wurden diese Modelle sowie verschiedene Abwandlungen auf die Verbundfuge übertragen. Bei allen Betrachtungen ist wichtig zu betonen, dass diese Übertragung nur im Bereich der Teilverdübelung angewandt wird, da die Dübel in diesem Bereich die Schwachstelle des Querschnittes darstellen. Bei der Übertragung der theoretischen Modelle wird nicht zwischen verschiedenen Verbundmitteln unterschieden. Ebenfalls wird für die Dübeltragfähigkeit ein fester Wert P_k angesetzt. Eine Unterscheidung der verschiedenen möglichen Versagensarten geschieht somit nicht.

Zum einen wurde ein ideal-sprödes Kraft-Schlupf-Verhalten, d.h. ein sprödes Versagen der Verbundmittel, angenommen. Dieses wurde auf Systeme von einem und mehreren Dübeln unter Annahme verschiedener Modelle, wie das Seriensystem oder das Daniels-System, angewandt. Neben einer gleichverteilten Last wurde durch das Konzept der Hyperwürfel ebenfalls eine mögliche ungleiche Lastverteilung mit verschiedensten Ausfallreihenfolgen betrachtet. Zum anderen wurde ein duktileres Materialverhalten der Verbundmittel angenommen. Dabei wurden ideale Systeme mit und ohne Korrelation der Widerstände betrachtet. Die Untersuchung der plastischen Momententragfähigkeit eines Verbundträgers in Form einer Grenzzustandsgleichung führte ebenfalls zu einem ideal-plastischen System. Für diese Modelle wurde ein neuer Teilsicherheitsbeiwert in Abhängigkeit der Verbundmittelanzahl bestimmt. Dieser lag für alle üblichen nach Eurocode geforderten Sicherheitsindizes bereits für kleine Dübelanzahlen unter 1,0.

Spröde und plastische Systeme berücksichtigen eine Umverteilung der Last, jedoch immer eine ideale. Diese entspricht nicht der tatsächlichen Umverteilung in der Verbundfuge und die Sicherheit wird in diesen Modellen daher überschätzt. Wird jedoch keine Lastumverteilung angesetzt, bleibt der Sicherheitsindex konstant. Gegenüber der aktuellen Bemessung ergibt sich bei Annahme einer Lastumverteilung eine Steigerung des Sicherheitsindex, allerdings kleiner als bei Systemen mit idealer Lastumverteilung.

Die tatsächliche Umverteilung wird im Modell der Hyperwürfel berücksichtigt. Die Berechnungen mithilfe dieses Konzeptes lassen sich aufgrund begrenzter Rechenressourcen jedoch nur bis zu einer Anzahl an Verbundmitteln von $n = 5$, maximal $n = 6$ sinnvoll anwenden.

Das Modell der Hyperwürfel beschreibt den tatsächlichen Verlauf des Sicherheitsindex wahrscheinlich am besten. Um die Berechnungen an Verbundträgern trotz der Begrenzung auf $n = 6$ umzusetzen, könnte in einem weiteren Schritt die Gruppierung der Verbundmittel eines Trägers in Betracht gezogen werden.

Das Konzept bietet weiterhin Potenzial zur Übertragung auf andere Fachbereiche des Bauingenieurwesens. Es könnte beispielsweise bei Verbundglas oder Brettschichtholz Anwendung finden. Für Verbundglas mit bis zu sechs Scheiben könnte der Ausfall einzelner Scheiben und dessen Einfluss auf die Tragfähigkeit und die Sicherheit aus probabilistischer Sicht betrachtet werden. Analog könnte dies für Brettschichtholz mit bis zu sechs Lamellen geschehen.

Wenn nicht die idealen Modelle verwendet werden, bei denen der Sicherheitsindex über eine Formel ausgedrückt werden kann, gestaltet sich die Berechnung eines neuen Teilsicherheitsbeiwertes schwierig. Für diese Modelle muss ein Verfahren entwickelt werden, durch das ein neuer Teilsicherheitsbeiwert für die Bemessung bestimmt werden kann.

In einem weiteren Schritt könnten nicht statische Lasten für Ermüdungsberechnungen betrachtet und deren Einfluss auf den Sicherheitsindex sowie den Teilsicherheitsbeiwert ermittelt werden.

7 Literatur

- [1] M. Feldmann, „Stahlbau IV“. Skript zur Vorlesung, Institut für Stahlbau, RWTH Aachen, Aachen, 2021.
- [2] *DIN EN 1994-1-1: Eurocode 4: Bemessung und Konstruktion von Verbundtragwerken aus Stahl und Beton – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Anwendungsregeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1994-1-1:2004 + AC:2009*, DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Dez. 2010.
- [3] *DIN EN ISO 13918: Schweißen – Bolzen und Keramikringe für das Lichtbogenbolzenschweißen (ISO 13918:2017 + Amd 1:2021); Deutsche Fassung EN ISO 13918:2018 + A1:2021*, DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Dez. 2021.
- [4] DIBt - Deutsche Institut für Bautechnik, *Allgemeine Bauartgenehmigung: Stahlverbundträger mit Verbunddübelleisten in Klothoiden- und Puzzleform*.
- [5] *DIN EN 1993-1-1: Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1993-1-1:2005 + AC:2009*, DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Dez. 2010.
- [6] K. Wolters und M. Feldmann, „Ermüdungsuntersuchungen an Verbundträgern mit Verbunddübelleisten und nachgiebiger Verbundfuge mittels Stabwerkmodellen“.
- [7] K. Langosch, *Das Tragverhalten von Glasstützen mit Mono- und Verbundquerschnitten*. Aachen: Shaker-Verl., 2013.
- [8] C. Hofstadler und M. Kummer, *Chancen- und Risikomanagement in der Bauwirtschaft*. Springer Berlin Heidelberg, 2017.
- [9] W. Dürr und H. Mayer, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Schließende Statistik*, 2017.
- [10] D. Straub, „Lecture notes in Engineering Risk Analysis“, TUM, München, 2018.
- [11] D. Straub, „Lecture Notes in Structural Reliability“, TUM, München, 2010.
- [12] MathWorks Deutschland, *Weibull Distribution - MATLAB & Simulink*. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.mathworks.com/help/stats/weibull-distribution.html> (Zugriff am: 19. Juli 2022).
- [13] L. Fischer, *Das neue Sicherheitskonzept im Bauwesen: Ein Leitfaden für Bauingenieure, Architekten und Studenten*. Berlin: Ernst, 2001.
- [14] *DIN EN 1990: Eurocode: Grundlagen der Tragwerksplanung; Deutsche Fassung EN 1990:2002 + A1:2005 + A1:2005/AC:2010*, DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Okt. 2021.
- [15] H. E. Daniels, „The Statistical Theory of the Strength of Bundles of Threads. I“, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Jg. 183, Nr. 995, S. 405–435, 1945.
- [16] K. Zilch, C. J. Diederichs und R. Katzenbach, Hg., *Handbuch für Bauingenieure: Technik, Organisation und Wirtschaftlichkeit*, 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012.

- [17] S. Gollwitzer und R. Rackwitz, „On the reliability of Daniels systems“, *Structural Safety*, 1990.
- [18] Kai Uwe Bletzinger, Martin Fußeder, Daniel Straub, Max Teichgräber, „Schlussbericht des Forschungsprojektes GruSiBau 2.0“, 2021.
- [19] *MATLAB*. R2019b. MathWorks, Inc.
- [20] *Excel*. 2010. Microsoft.
- [21] Engineering Risk Analysis Group, *FORM*. [Online]. Verfügbar unter:
<https://www.cee.ed.tum.de/en/era/software/reliability/first-order-reliability-method/>.
- [22] Engineering Risk Analysis Group, *ERADist*. [Online]. Verfügbar unter:
<https://www.cee.ed.tum.de/en/era/software/eradist/>.

A Anhang

Tabelle A1: Schlupffunktionen für ausgewählte Lastfälle [7]

	Lastfall 1	Lastfall 2	Lastfall 3
Statisches System			
Homogene Lösung s_H	Charakteristische Gleichung $\lambda^2 - \alpha_z^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \alpha_z \Rightarrow s_H(x) = C_1 \cdot e^{\alpha_z x} + C_2 \cdot e^{-\alpha_z x}$		
Querkraftverlauf V(x)	$V(x_1) = -\frac{P}{2}$ $V(x_2) = \frac{P}{2}$	$V_I(x_{I,1}) = 0$ $V_I(x_{I,2}) = 0$	$V(x_1) = -q_z(x_1) \cdot x_1$ $V(x_2) = q_z(x_2) \cdot x_2$
Schlupffunktion s(x)	$s(x_1) = -\frac{\beta_z \cdot P}{2 \cdot \alpha_z^2} \left[1 - \frac{\cosh\left[\alpha_z \left(x_1 - \frac{L}{2}\right)\right]}{\cosh\left(\frac{L}{2} \alpha_z\right)} \right]$ $s(x_2) = -s(x_1)$	$s_I(x_{I,1}) = -\frac{\beta_z \cdot P \sinh(b \alpha_z) \sinh(\alpha_z x_{I,1})}{\alpha_z^2 \cosh[(a+b) \alpha_z]}$ $s_{II}(x_{II,1}) = -\frac{\beta_z \cdot P}{\alpha_z^2} \left[1 - \frac{\cosh(a \alpha_z) \cosh[\alpha_z(x_{II,1} - b)]}{\cosh[(a+b) \alpha_z]} \right]$ $s(x_2) = -s(x_1)$	$s(x_1) = -\frac{\beta_z \cdot q_z(x_1)}{\alpha_z^2} \left[x_1 - \frac{\sinh(\alpha_z x_1)}{\alpha_z \cdot \cosh\left(\frac{L}{2} \alpha_z\right)} \right]$ $s(x_2) = -s(x_1)$
Schlupfverlauf			

Tabelle A2: Ergebnisse des Sicherheitsindex aus Simulation und Theorie

n	Simulation (1.000)		Theorie	Simulation (10.000)		Theorie
	Anteil	Verteilung		Anteil	Verteilung	
1	2,03	2,01	2,00	1,96	1,97	2,00
3	1,88	1,71	1,82	1,79	1,74	1,82
5	1,98	1,74	1,87	1,85	1,79	1,87
10	1,96	1,95	2,04	2,01	1,95	2,04
15	2,33	2,12	2,19	2,21	2,11	2,19

Tabelle A3: Vergleich von Versagenswahrscheinlichkeit und Sicherheitsindex für verschiedene Lastverteilungen aus Simulation und Theorie (Hyperwürfel)

					Vergleich Simulation + Theorie						
n	var	Lastverteilung			Simulation		Theorie Hyperwürfel		Abweichung (abs.)		
					Pr	β	Pr	β	Pr	β	
2	0,1	1	1		0,047	1,675	0,0449827	1,6955803	0,04	0,01	
		1	1,5		0,344	0,402					
		1	2		0,755	-0,690					
	0,2	1	1		0,0345	1,818	0,03776336	1,77725244	-0,09	0,02	
		1	1,5		0,078	1,419					
		1	2		0,1385	1,087					
3	0,1	1	1	1	0,0675	1,495	0,0667	1,501	0,01	0,00	
		1	2	2	0,5855	-0,216	0,5704	-0,1774	0,03	0,18	
		1	2	3	0,9813	-2,081	0,9778	-2,0097	0,00	0,03	
		1	2	4	1		0,9999	-3,7145			
	0,2	1	1	1	0,0375	1,780	0,0341	1,824	0,09	0,02	
		1	2	2	0,1348	1,104	0,1302	1,1255	0,03	0,02	
		1	2	3	0,2823	0,576	0,2756	0,596	0,02	0,03	
		1	2	4	0,4773	0,057	0,4737	0,0659	0,01	0,16	
4	0,1	1	2	3	4	0,998	-2,878	0,9983	-2,9338	0,00	0,02
		1	1	1	1	0,0916	1,331	0,0865	1,3628	0,06	0,02
		1	2	3	3	0,9477	-1,623	0,9364	-1,525	0,01	0,06
		1	2	2	3	0,984	-2,144	0,9783	-2,0192	0,01	0,06
	0,2	1	2	3	4	0,4333	0,168	0,4106	0,2261	0,05	0,35
		1	1	1	1	0,0325	1,845	0,0327	1,8421	-0,01	0,00
		1	2	3	3	0,2706	0,611	0,2546	0,6601	0,06	0,08
		1	2	2	3	0,2358	0,720	0,2302	0,7381	0,02	0,03