



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Építőmérnöki kar  
Hidak és Szerkezetek Tanszék

# **ACÉL TRAPÉZLEMEZ-GERINCŰ TARTÓ KIFORDULÁSVIZSGÁLATA**

MSc Diplomamunka

**Bärnkopf Erzsébet  
R3540L**

Konzulensek:

Dr. Kövesdi Balázs  
Egyetemi docens, Hidak és Szerkezetek Tanszék

Dr. Jáger Bence  
Adjunktus, Hidak és Szerkezetek Tanszék

Budapest, 2021

## DIPLOMAMUNKA FELADAT

Név:	<b>Bärnkopf Erzsébet</b>	Neptun kód:	<b>R3540L</b>
Képzés:	Szerkezet-építőmérnök mesterszak (MSc)	Szemeszter:	<b>2021/22/1</b>
Specializáció:	<b>Tartószerkezetek specializáció</b>	Nyilvánt.sz.:	<b>MSc-SP-T-008-21/22/1</b>
Cím:	<b>Trapézlemez gerincű tartók kifordulásvizsgálata</b>		

### A feladat leírása:

A diplomamunka témája a trapézlemez gerincű tartók kifordulási ellenállásának vizsgálata, kifordulási görbe fejlesztése determinisztikus és sztochasztikus módszerek alapján. A diplomamunka keretében áttekintendők a trapézlemez gerincű szerkezetek viselkedési és méretezési sajátosságai, különös tekintettel a kifordulás jelenségének szempontjából, valamint áttekintendők a szakirodalmi kifordulási méretezési eljárások és azok méretezéselméleti háttere. A szakirodalomban rendelkezésre álló kísérletek alapján kidolgozandó egy fejlett végeselemes modell, mely alapján a trapézlemez gerincű tartók kifordulási ellenállása meghatározható. A verifikált numerikus modellel végrehajtott paraméteres vizsgálat eredményei alapján meghatározandók az egyes geometriai paraméterek kifordulási ellenállást befolyásoló hatása. A numerikus modell eredményei alapján a diplomamunka célja kifordulási görbe fejlesztés (i) determinisztikus módszer és statisztikai kiértékelés, illetve (ii) sztochasztikus módszer alapján.

### Kidolgozandó feladatrészek:

1. Szakirodalmi áttekintés alapján tanulmány készítés: (i) trapézlemez gerincű tartók kifordulási ellenállásának, méretezési hátterének áttekintése; (ii) a szakirodalomban található kísérleti, és (iii) elméleti vizsgálati eredmények összefoglalása.
2. A rendelkezésre álló szakirodalmi kísérletek alapján fejlett végeselemes modell kidolgozása a szerkezeti viselkedés, a kifordulási ellenállás meghatározására.
3. Vizsgálati program kidolgozása a geometriai jellemzők szerkezeti viselkedést befolyásoló hatásának elemzésére és a kifordulási görbe meghatározására.
4. A numerikus vizsgálati eredmények alapján kifordulási görbe fejlesztés determinisztikus és sztochasztikus módszerek alapján, valamint a két megoldás összehasonlítása.
5. Összefoglaló értékelés; konklúziók megfogalmazása.

A munka során diplomatervezési naplót kell vezetni, amelyet beadáskor csatolni kell.

### Konzulens:

Dr. Kövesdi Balázs Géza, egyetemi docens	Hidak és Szerkezetek Tanszék	50 %
--	------------------------------	------

### Társ-konzulens(ek):

Dr. Jáger Bence, adjunktus	Hidak és Szerkezetek Tanszék	50 %
A feladat kiadásának időpontja:	2021.09.06	
A feladat beadásának határideje:	2021.12.10	

 Dr. Dunai László a specializáció részéről	 Dr. Rózsa Szabolcs Dékán
---	--

## HALLGATÓI NYILATKOZAT A DOLGOZAT EREDETISÉGÉRŐL ÉS ÖNÁLLÓ TEVÉKENYSÉGRŐL

Alulírott Bärnkopf Erzsébet (Neptun kód: R3540L) jelen nyilatkozat aláírásával kijelentem, hogy a Trapézlemez-gerincű tartó kifordulásvizsgálata című szakdolgozat/ diplomamunka (a továbbiakban: dolgozat) önálló munkám, a dolgozat készítése során betartottam a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. tv. szabályait, valamint az egyetem által előírt, a dolgozat készítésére vonatkozó szabályokat, különösen a hivatkozások és idézések tekintetében.

Kijelentem továbbá, hogy a dolgozat készítése során az önálló munka kitétel tekintetében a konzulenszt, illetve a feladatot kiadó oktatót nem tévesztettem meg.

Kijelentem, hogy a dolgozatot korábban más felsőoktatási intézményben, illetve más szakon még nem nyújtottam be diplomamunkaként, vagy szakdolgozatként.

Kijelentem, hogy a diplomamunka értékelésének alapját képező elektronikusan feltöltött és papír alapon beadott törzsdokumentum mindenben megegyezik.

Jelen nyilatkozat aláírásával tudomásul veszem, hogy amennyiben bizonyítható, hogy a dolgozatot nem magam készítettem vagy a dolgozattal kapcsolatban szerzői jogsértés ténye merül fel, a Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem megtagadja a dolgozat befogadását és ellenem fegyelmi eljárást indíthat.

A dolgozat befogadásának megtagadása és a fegyelmi eljárás indítása nem érinti a szerzői jogsértés miatti egyéb (polgári jogi, szabálysértési jogi, büntetőjogi) jogkövetkezményeket.

Budapest, 2021. 12. 10.

*Bärnkopf Erzsébet*  
.....

Bärnkopf Erzsébet

## **Köszönetnyilvánítás**

Szeretnék köszönetet mondani konzulenseimnek, Dr. Kövesdi Balázsnak és Dr. Jáger Bencének, akik szakmai tudásukkal, tapasztalatukkal és türelmükkel segítettek az elmúlt évben. Köszönöm a diplomamunkám elkészítésében nyújtott sok segítséget, hogy szántak időt az alapos magyarázatokra, és hogy az elvárhatónál lényegesen több konzultációs lehetőséggel megkönnyítették a munkámat.

Köszönöm Módis Mártonnak, hogy figyelemmel kísérte a diplomamunka érdekes és küzdelmes pillanatait egyaránt, és természetesen külön hálás vagyok indiai kapcsolatainak, valamint az angoltudásának. Köszönöm Török Viktóriának, hogy együtt élveztük a mesterképzés online változatának szépségeit, nehézségeit, és hogy mindig volt kivel megosztanom az egyetemmel kapcsolatos kétségeimet, kérdéseimet, meg úgy egyáltalán: mindent.

Végül, de nem utolsó sorban nagyon köszönöm a családomnak a tanulmányaimhoz nyújtott támogatást, biztatást és azt, hogy meghallgatták újra és újra, hogy a modellel éppen aktuálisan mi a gond.

## Összefoglalás

A diplomamunkámban a trapézlemez-gerincű tartók kifordulási viselkedését vizsgálom, ami a korábbi kutatási eredmények alapján egyértelműen eltér a hagyományos I-tartókétól. A trapézlemez-gerincű tartók jelenlegi alkalmazási területein az egyik leggyakoribb tönkremeneteli mód a kifordulás (pl: gerendahidak építési állapotában), azonban jelenleg még nincs elfogadott/szabványosított méretezési eljárás kidolgozva a trapézlemez-gerincű tartók kifordulási ellenállásának meghatározására, így további vizsgálatokra van szükség a szerkezeti viselkedésük pontosabb megismeréséhez. A diplomamunkám fő célja ezért annak meghatározása, hogy az EN1993-1-1 szabvány melyik kihajlási, vagy kifordulási görbéje használható biztonsággal a trapézlemez-gerincű tartók kifordulási ellenállásának meghatározásához.

Első lépésben áttekintettem a trapézlemez-gerincű tartók történetét, alkalmazási területeit, és a szerkezet kifordulási viselkedésével kapcsolatos eddigi kutatási eredményeket. Ezt követően egy fejlett vége-selemes modellt építettem fel, ehhez a BME Hidak és Szerkezetek Tanszék Szerkezetvizsgáló Laboratóriumában 2019-ben végzett kísérletek eredményeit használtam kiindulási alapként. A laboratóriumi kísérlet alapján validált, csuklós-csuklós megtámasztású, két végi koncentrált nyomatékkal terhelt tartó verifikált numerikus modelljén determinisztikus vizsgálatokat hajtottam végre. Megvizsgáltam, hogy milyen hatása van a különböző gerinckialakításoknak, a megtámasztás módjának, illetve az anyagminőségnek a kifordulási ellenállásra.

A kifordulási ellenállás meghatározása kapcsán két megközelítéssel foglalkoztam. Amennyiben numerikus modell segítségével szeretnénk megkapni a szerkezet kifordulási ellenállását, akkor a tervezőnek arra vonatkozó javaslatokra van szüksége, hogy mekkora imperfekciót kell figyelembe vennie a modellezés során. Ezen tervezési módszer segítségével meghatároztam a szükséges ekvivalens geometriai imperfekciókat, amivel a szabvány előírásainak eleget lehet tenni ( $L/1000 +$  sajátfeszültség). A másik lehetőséget a „csökkentő tényező” módszer jelenti, ehhez kapcsolódóan különböző keresztmetszetű és fesztávú tartók rugalmas kritikus nyomatékát (LBA), illetve geometriai és anyagi nemlineáris imperfekt analízis alkalmazásával a kifordulási ellenállását (GMNIA) határoztam meg. Majd a determinisztikus számítás alapján kidolgozott adatbázist statisztikai alapon kiértékeltem, mely kiértékelés alapján több kihajlási és kifordulási görbére is meghatároztam a szükséges ellenállás-oldali parciális tényező értékét, amely alapján az EN 1990 követelményeit kielégítő kifordulási görbét meghatároztam.

## **Abstract**

In my thesis I investigate the lateral-torsional buckling behavior of trapezoidally corrugated web girders which, based on previous researches, is clearly different from that of conventional I-beams. In the current applications of trapezoidally corrugated web girders one of the most common failure modes is the lateral-torsional buckling (e.g. in the construction state of beam bridges), however no accepted / standardised sizing method has been developed to determine the lateral-torsional buckling resistance of trapezoidally corrugated web girders, so further investigations are needed to better understand their structural behavior. Therefore, the main objective of my thesis is to determine which of the lateral-torsional buckling or flexural buckling curves of EN1993-1-1 can be used safely to determine the lateral-torsional buckling resistance of trapezoidally corrugated web girders.

In the first step I reviewed the history of trapezoidally corrugated web girders, their application, and the results of previous researches. Subsequently, I built an advanced finite element model (in ANSYS) using the results of experiments performed at the Budapest University of Technology and Economics in 2019 as a starting point. Based on the laboratory experiments, I performed deterministic virtual tests on a validated and verified numerical model of a simply supported beam subjected by concentrated moment at both ends. I investigated the effect of different web profiles, the different end support conditions, and the material quality on the lateral-torsional buckling resistance.

Two approaches were used to determine the lateral-torsional buckling resistance. If we want to use the numerical model to obtain the lateral-torsional buckling resistance of the structure, the designer needs to have some suggestions on the amount of imperfection to consider in the modelling. To assist this design method, I have determined the equivalent geometric imperfections required to meet the requirements of the standard ( $L / 1000 + \text{residual stress}$ ). The other option is the “reduction factor” method for which I have determined the elastic critical moment and the lateral-torsional buckling resistance of different cross-sections and spans using linear buckling (LBA) and geometric and material nonlinear imperfect analyses (GMNIA). Then the database developed on the basis of the deterministic calculation is statistically evaluated to determine the value of the required resistance-side partial factor for several lateral-torsional buckling and flexural buckling curves; on this basis I determined the buckling curve which meets the reliability requirements of EN 1990.

## KONZULTÁCIÓS NAPLÓ

Hallgató neve, NEPTUN kódja: Bärnkopf Erzsébet, R3540L

Diplomamunka címe: Trapézlemez-gerincű tartó kifordulásvizsgálata

#	Dátum	Konzultáció témája	Konzulens aláírása
1	2021. 09. 08.	tanulmány, szakirodalom	Kövendi Balázs JK
2	2021. 09. 15.	ANSYS modell validálás, verifikáció	Kövendi Balázs JK
3	2021. 09. 22.	csuklós megtámasztás kialakítása a végeleemes modellben	Kövendi Balázs JK
4	2021. 09. 29.	végnyomaték eloszlásának módosítása, gerinc kialakítás kérdései, imperfekció	Kövendi Balázs JK
5	2021. 10. 06.	tanulmány véglegesítése, geometriai hiba, sajátfeszültség-modell	Kövendi Balázs JK
6	2021. 10. 11.	sajátfeszültség-modell véglegesítése, megtámasztás hatása	Kövendi Balázs JK
7	2021. 10. 14.	helyettesítő geometriai imperfekció különböző karcsúságok és keresztmetszetek esetén	Kövendi Balázs JK
8	2021. 10. 20.	a vizsgált tartók kibővítése (ekv. geom. imp.), determinisztikus vizsgálat	Kövendi Balázs JK
9	2021. 10. 27.	Linder, Lopes javaslata szerint $M_{crit}$ meghatározása, kihajlási görbékkel összevetés	Kövendi Balázs JK
10	2021. 11. 03.	determinisztikus vizsgálat eredményei, statisztikai kiértékelés	Kövendi Balázs JK
11	2021. 11. 10.	statisztikai kiértékelés, $\gamma_{MI}$ parciális tényezők meghatározása	Kövendi Balázs JK

12	2021. 11. 19.	kifordulási görbékhez tartozó helyettesítő geom. imperfekció, függvények	Kövendi Balázs JK
13	2021. 11. 26.	anyagminőség hatása a teherbírásra	Kövendi Balázs JK
14	2021. 12. 03.	hibrid tartók, nagyszilárdságú acél, anyagmodell, sajátfeszültség	Kövendi Balázs JK
15	2021. 12. 07.	dokumentáció	Kövendi Balázs JK

A konzulenssel való megbeszélés alapján a diplomamunkában a determinisztikus vizsgálat eredményei kerülnek csak bemutatásra, a sztochasztikus vizsgálat eredményei további elemzést igényelnek.

A diplomamunka beadható:

Kövendi Balázs. J. J. J. J. J.

(Tanszéki konzulens aláírása)

Budapest, 2021. 12. 10.



# Tartalomjegyzék

Diplomamunka feladatkiírás .....	2
Hallgatói nyilatkozat .....	3
Köszönetnyilvánítás .....	4
Összefoglalás .....	5
Abstract.....	6
Konzultációs napló .....	7
1. Bevezetés .....	12
2. Trapézlemez-gerincű tartók bemutatása .....	13
2.1. Történetük, általános jellemzők.....	13
2.2. Alkalmazási területek a hídépítésben .....	14
2.2.1. Trapézlemez-gerincű öszvér hidak.....	15
2.2.2. Trapézlemez-gerincű hibrid szerkezetű hidak.....	16
2.3. Trapézlemez-gerincű tartók jelölésrendszere .....	22
3. Eddigi javaslatok a kifordulási kritikus nyomaték számítására .....	23
3.1. Lindner ajánlása.....	23
3.2. Larsson és Persson ajánlása.....	24
3.3. Lopes és társai ajánlása .....	25
3.4. További kutatások eredményei.....	25
4. Kísérletek a kifordulási ellenállás meghatározására.....	28
4.1. Külföldi kísérletek .....	28
4.2. Kísérletek a BME Hidak és Szerkezetek Tanszéken.....	28
5. Méretezéselméleti módszerek áttekintése .....	32
5.1. A tervezési módszerek méretezéselméleti hátterének áttekintése .....	32
5.2. Tönkremeneteli valószínűség és a $\beta$ megbízhatósági index .....	33
5.3. Félvalószínűségi tervezési módszerek – a hatás és ellenállás oldal szétválasztása.....	34
5.4. Az ellenállási modell meghatározása statisztikai módszerrel az EN 1990 szerint.....	35
5.5. $\gamma_{M1}$ meghatározási módszerek a nemzetközi szakirodalom alapján.....	37
6. A laboratóriumi kísérlethez tartozó numerikus modell.....	39

6.1. A vizsgált gerenda geometriai kialakítása és a kísérleti eredmény .....	39
6.2. Kidolgozott numerikus modell és specialitásai .....	41
6.2.1. Geometriai modell és peremfeltételek.....	41
6.2.2. Alkalmazott anyagmodell.....	42
6.2.3. Alkalmazott imperfekciók .....	44
6.2.4. Alkalmazott analízis típusa.....	44
6.3. Numerikus modell verifikálása és validálása .....	45
7. A vizsgálatokhoz alkalmazott numerikus modell bemutatása.....	47
7.1. Geometriai modell és peremfeltételek.....	47
7.2. Az alkalmazott anyagmodell .....	49
7.3. Az alkalmazott imperfekciók .....	49
7.3.1. A geometriai imperfekció alakja a numerikus modellben.....	50
7.3.2. Az alkalmazott sajátfeszültség-modell bemutatása .....	51
7.4. Hálóérzékenység vizsgálat .....	52
8. Vizsgálatok a numerikus modell alapú méretezési eljáráshoz .....	53
8.1. Méretezési eljárások stabilitásvizsgálathoz.....	53
8.2. Imperfekció-érzékenységi futtatások eredményei.....	53
9. Különböző gerinc kialakítású tartók összehasonlítása .....	56
10. Megtámasztások hatása .....	59
10.1. Megtámasztások hatása a rugalmas kritikus nyomatékra.....	59
10.2. Szakirodalmi javaslatok alapján és numerikusan számított $M_{crit}$ -ok összehasonlítása	59
10.3. Megtámasztások hatása a kifordulási ellenállásra .....	61
11. Determinisztikus vizsgálat eredményei.....	63
11.1. Eredmények a numerikus modellel számított karcsúság alapján .....	63
11.2. Eredmények a szakirodalmi ajánlások alapján számított karcsúsággal.....	64
11.3. Az eredmények statisztikai kiértékelése, $\gamma_{M1}$ parciális tényező meghatározása .....	65
11.4. Kifordulási görbékhez tartozó helyettesítő geometriai imperfekció .....	70
12. Anyagminőség hatása .....	73

12.1. Anyagminőség hatása a kifordulási ellenállásra.....	74
12.2. Hibrid tartók vizsgálata .....	75
13. Összefoglalás .....	76
Irodalomjegyzék.....	78

## 1. Bevezetés

A tartószerkezetek önsúlyának és gerinchorpadási hajlamának csökkentése, valamint a szállításuk, beszerelésük egyszerűsítése motiválta a trapézlemez-gerincű tartók kifejlesztését, amelyek tulajdonképpen annyiban módosították a hagyományos I-tartókat, hogy síklemez helyett valamilyen profillemezt alkalmaztak a szerkezetek gerinclemezeként. Síklemez-gerincű tartók esetén a gerendák gerincére utólag merevítő bordákat hegesztenek, így lehet kiküszöbölni a gerinc horpadását. Erre ad alternatívát a trapézlemez-gerinc alkalmazása, ebben az esetben nem szükséges utólag merevítő bordákat elhelyezni, ráadásul ilyen szerkezeti kialakítás esetén a gerinc vékonyabbá tehető, mint a hagyományos tartóknál. Így általában könnyebb szerkezetek gyártása válik lehetővé, illetve az utólagos hegesztéssel járó munkák is elkerülhetők, cserébe viszont hátrányt jelent, hogy a trapézlemez-gerincű tartók gyártása speciális technológiát igényel.

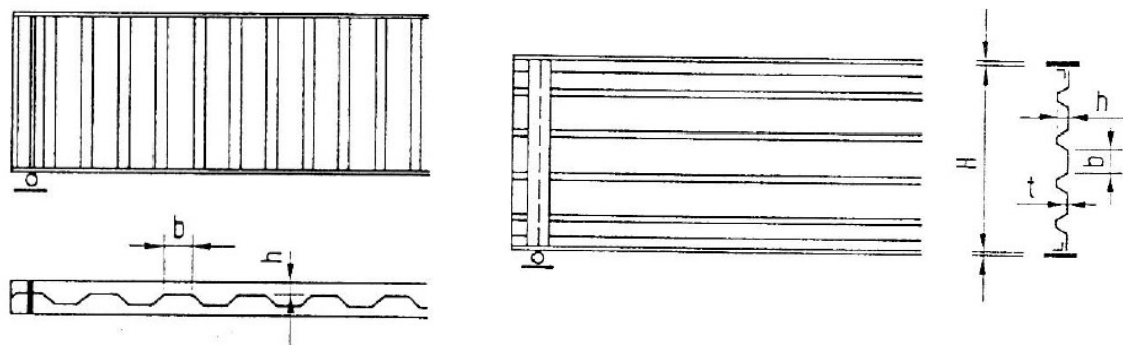
A trapézlemez-gerincű tartók viszonylag újszerű szerkezetek, sok egyedi tulajdonsággal rendelkeznek és szerkezeti viselkedésük, valamint méretezési módszerük sok tekintetben eltér a hagyományos I-tartókéétól. A következőkben kizárólag a trapézlemez-gerincű tartók kifordulási tönkremenetelével fogok foglalkozni, ugyanis hídépítési területen építési állapotban ez az egyik leggyakoribb lehetséges tönkremeneteli mód.

Számos elméleti levezetés és numerikus szimuláció foglalkozott már a trapézlemez-gerincű tartók kifordulásával, azonban a legtöbb kutatási programból hiányoztak a laboratóriumi kísérletek, amik elengedhetetlenek ahhoz, hogy az eddig kidolgozott elméleti ajánlások közül valamelyiket teljes mértékben alá lehessen támasztani. Így jelenleg még nincs elfogadott/szabványosított méretezési eljárás a trapézlemez-gerincű tartók kifordulási ellenállásának meghatározására és számos nyitott kérdés megválaszolatlan ebben a témában. Az eddigi kísérletek alapján azonban köztudott, hogy a trapézlemez-gerincű tartók nagyobb kifordulási ellenállással rendelkeznek, mint a síklemez-gerincű tartók, a teherbírásnövekedés mértéke azonban nagyban függ a szerkezet geometriai kialakításától, amelyre nincs jelenleg kiforrott méretezési eljárás. Látható tehát, hogy további kutatásokra van szükség ezen a területen. Ezért a diplomamunkámban azt a cél tűztem ki, hogy a trapézlemez-gerincű tartók kifordulási ellenállásához tartozó kifordulási görbét szeretném meghatározni determinisztikus módszer alkalmazásával.

## 2. Trapézlemez-gerincű tartók bemutatása

### 2.1. Történetük, általános jellemzők

A trapézlemez-gerincű tartók alkalmazása Svédországból indult, ahol már az 1960-as évek második felében lehetett ilyen szerkezettel találkozni. Az újszerű kialakítás célja elsősorban a nyírási ellenállás növelése volt, ezért a trapézlemez úgy alkalmazták, hogy a bordázása függőleges volt. A következő években egyre elterjedtebb lett az alkalmazásuk Svédországban, és Franciaországban is elkezdtek használni hasonló szerkezeteket, de ott  $90^\circ$ -kal elforgatva, vízszintes bordázatot alakítottak ki, a kétféle szerkezeti kialakítást szemlélteti az 1. ábra.



1. ábra: Svéd (balra) és francia (jobbra) kialakítású gerenda [2].

A francia megoldás azért tűnt kedvezőnek, mert a kereskedelemben használatos trapézlemezek bármelyikét fel lehetett használni ilyen célra. A későbbiekben mégis a svéd változat terjedt el [3], ugyanis a francia kialakítás esetében két problémás részlettel szembesültek a gyártók: (i) az erőbevezetési helyeken a bordás gerinclemez miatt csak nehezen lehetett elhelyezni a szükséges függőleges merevítőbordákat és (ii) az öv-gerinc kapcsolat kialakításához két nem egyenlő szárú szögacélt kellett alkalmazni. A trapéz kialakítás a svéd megoldás esetén az öv-gerinc találkozásánál okozott kezdetben nehézséget, de az automatizált hegesztés megjelenése óta tulajdonképpen már ez sem sorolható a hátrányok közé.

A trapézlemez-gerincű tartóhoz hasonló megoldást kínál a hullámlemez-gerincű tartók alkalmazása is. Maga a hullámlemez Palmer [4] nevéhez fűződik, aki 1829-ben szabadalmaztatta, és csak később kezdték el használni I-tartók gerincéhez. Az elterjedésének sokáig gátat szabott az, hogy a trapézlemez-gerincű tartóhoz hasonlóan a gerinc és az öv találkozásánál szükséges nyakvarrat hegesztésének elvégzése sok munkát igényelt, de a hegesztés automatizálásával ez megoldódott. Miután a hegesztéstechnika és az elektronika fejlődése lehetővé tette az olyan gyártóberendezések megalkotással, amelyek segítségével a termékek gazdaságosan előállíthatókká váltak, ez a tartó is jó alternatívája lett a hagyományos kialakításnak, sőt a hegesztés szempontjából ez a fajta kialakítás kedvezőbbnek bizonyult a

trapézformánál. A trapéz kialakítással szemben az az előnye is megvan a hullámlemez alkalmazásának, hogy a sík részfelületeken nem (vagy nehezebben) lép fel lokális horpadás. Statikai szempontból is kedvező a kishullámú folyamatos profil, mert nem lemezműként, hanem inkább ortotrop lemezként működik.

Ami a hullámlemez-gerincű tartók felhasználását illeti, bárhol lehet alkalmazni őket, ahol a korábban 2 m alatti szerkezeti magasságú rácsos tartókat építettek volna be, szinte szerkezeti korlátozások nélkül alkalmazható mind hajlított gerendaként (pl. egy tető, vagy földem részeként), mind tipikusan normálerőkkel terhelt szerkezeti elemként (pl. keretoszlop), melyre példát a 2. ábra mutat.



**2. ábra:** Hullámlemez-gerincű tartók [6].

IPE 400-as hengerelt szelvények méreténél kisebb hullámgerincű tartókat nem használnak a gyakorlatban, ez tekinthető alsó korlátnak. Főként a csarnoképítés területén gyakori az alkalmazásuk (~18-40 m-es fesztávokon), illetve darupályatartókként funkcionálnak. Ehhez a szerkezeti kialakításhoz teljesen más gyártástechnológia szükséges, mint a trapézlemez-gerincű tartókhoz, Európában a Zeman [5] cég gyárt ilyen termékeket, és általában magasépítésben alkalmazzák az általuk kínált szerkezet típust. A cég a hullámlemez-gerincű tartók gyártásához szükséges gépek létrehozásában is dolgozik, és céljuk az automatizálás révén minimalizálni a költséges és időigényes hegesztési folyamatot is.

## **2.2. Alkalmazási területek a hídépítésben**

A trapézlemez-gerincű tartók használata különböző szerkezeti feladatokra egyre népszerűbb lett az elmúlt években. Elsősorban ipari, illetve kereskedelmi épületekben és a hídépítés területén alkalmazzák, ahol különösen előnyös az anyagfelhasználáshoz viszonyítva nagy teherbírásuk. A hidak esetében két csoportot különböztethetünk meg: az egyik az öszvér, a másik a hibrid szerkezetekben való alkalmazás. Öszvér kialakítás esetén a tartószerkezet felső öve vasbetonból, a gerinc, valamint az alsó öv pedig acélból készül. A hibrid szerkezeti megoldásnál mindkét öv vasbetonból készül, és a gerincet profillemel alkotja. A megvalósult

trapézlemez-gerincű öszvér hidak száma meglehetősen csekély, a hibrid megoldás ezzel szemben sokkal elterjedtebb, melyre példát a 3. ábra mutat.

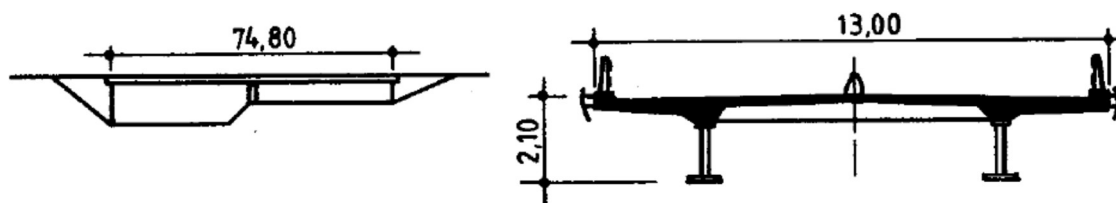


**3. ábra:** Japán hibrid hídgerenda és a Sou-folyó hídja.

Számos ilyen hidat építettek Ázsiában, elsősorban Japánban, de ugyanúgy megjelentek ezek a szerkezetek Franciaország és Németország területén, sőt Magyarországon is található már trapézlemez-gerincű hibrid szerkezetű híd (pl. Móra Ferenc híd), és ilyen szerkezeti kialakítással készül a napjainkban épülő Paks-Kalocsa Duna-híd is.

#### 2.2.1. Trapézlemez-gerincű öszvér hidak

Az öszvér főtartós hidakat tipikusan 15-120 m támaszközzel építik, kisebb fesztávon nem gazdaságos ez a szerkezeti kialakítás, a felső határát pedig műszaki szempontok szabják meg. Ugyanis kb. 120 m-es fesztáv felett a vasbeton pályalemez már vastagítást igényelne, a teherbírása kezd kimerülni a szokásos betonminőségek alkalmazása esetén. Azonban, ha a pályalemez méretét növeljük, a szerkezet önsúlyának növekedése gazdaságtalanná teszi a szerkezetet.



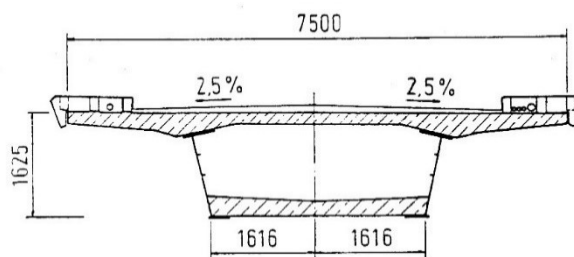
**4. ábra:** Asterix-híd (Franciaország) [7].

Az Asterix-híd (1989) egy jó példa a trapézlemez-gerincű öszvérhidakra. A kétnyílású szerkezet Franciaországban található, a fesztávja 74,8 m. Nyitott keresztmetszetű, tisztán öszvér kialakítású, az alsó öv acél, a felső öv pedig vasbeton, és ez egyben a pályaszerkezet is. Két főtartós felszerkezetű, főtartó magassága 2,1 m. (4. ábra)

A kivitelezés során az egyik támasz előtt építették meg a hidat teljes egészében, majd egy darabban betolták a későbbi helyére. Mivel nem volt arra lehetőség, hogy a helyszínen végezzék a hegesztési munkákat, az egész acélszerkezetet előre legyártották a gyárban és egyben szállították ki.

### 2.2.2. Trapézlemez-gerincű hibrid szerkezetű hidak

A 20. század második felétől kezdve a hídépítés fejlődése új lendületet vett, ennek eredményeképpen jelentek meg a trapézlemez-gerincű hibrid tartók. Az első lépcsőt a külsőkábeles feszítés fejlődése jelentette, ami gyakorlatilag forradalmasította a vasbeton hídépítést. A feszítőkábelek vonalvezetése leegyszerűsödött, a feszítési feszültségveszteségek csökkentek és ami szintén nagyon fontos: a pászmák cserélhetővé váltak, illetve folyamatosan lehetőség nyílt arra, hogy a feszültségeket ellenőrizzék és szükség esetén újra feszíthessék a pászmákat. A következő komoly előrelépés az volt, hogy a feszített vasbeton hidak keresztmetszeteit módosították: a vasbeton gerinceket sűrűn merevített acéllemezekre cserélték, ezt szemlélteti az 5. ábra, amelyen a PS8 számú A71-es autópálya feletti híd keresztmetszete látható Franciaországból.



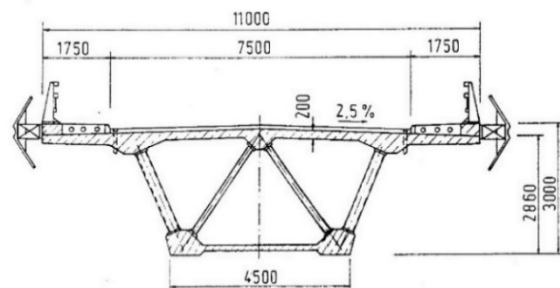
**5. ábra:** PS8 számú A71-es autópálya feletti híd keresztmetszete (Franciaország)

Olyan megoldás is elképzelhető, ahol acéllemez helyett, rácsos acél szerkezettel van kiváltva a vasbeton öv, erre kiváló példa az Arbois híd a Cuisance folyó felett, amelyet 1985-ben építettek.

(6. ábra)



(a)



(b)

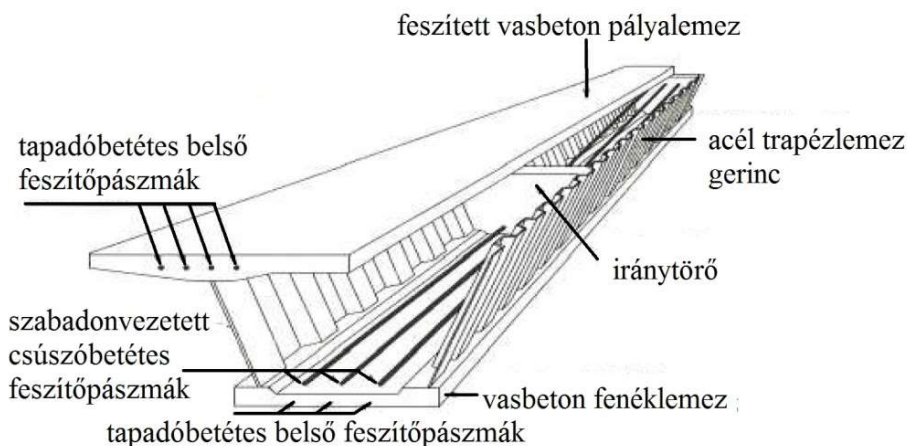
**6. ábra:** Arbois híd (a) és keresztmetszete (b) [8].



A harmadik fejlődési lépést pedig a trapézlemez-gerincű szerkezetek jelentik. Ez a szerkezeti kialakítás sok tekintetben kedvezőbb, mintha sűrűn merevített acél síklemez alakítja a tartó gerincét.

A legfontosabb előnyök a következők:

- a szükséges gerinclemez vastagsága kisebb, így tehát csökken az önsúly, ami gazdaságosabb szerkezetet eredményez,
- a kisebb önsúly miatt a fesztáv növelhető,
- lényegesen kevesebb merevítőbordára és diafragmára van szükség,
- hatékonyan építhetők ilyen típusú hidak betolósos technológiával,
- a keskeny vasbeton gerincek betonozása nehézkes volt, acélszerkezet alkalmazásával ez a probléma megszűnik,
- emiatt, valamint a kisebb önsúly miatt olcsóbb és gyorsabb lesz az építés,
- a szél hatására ébredő keresztirányú erők a gerincen keresztül közvetlenül a vasbeton övekre adódnak át,
- hatékonyabb feszítés, kevesebb pászma szükséges, mivel trapézlemez-gerinc alkalmazása esetén a feszítőerő a vasbeton övben marad („harmonikahatás”),
- a gerinc horpadási hajlama csökken
- a gerinclemez háromdimenziójú hajlékonysága következtében gazdaságosabban lehet kivitelezni az íves hidakat.



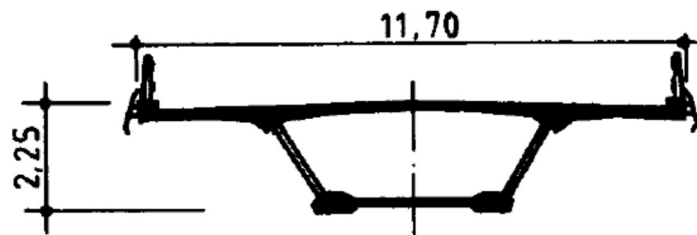
**7. ábra:** Egycellás hibrid trapézlemez-gerincű híd felszerkezetének sematikus ábrája. [25]

Az első trapézlemez-gerincű hibrid szerkezetű hidak Franciaország területén épültek, de nem sokáig kellett várni, számos előnyös tulajdonsága révén villámgyorsan elterjedt a világon. Nem csak szekrénykeresztmetszetű hidakat tartoznak a hibrid híd kategóriába, Japánban fejlesztették ki a „Corrugated Steel Web PCT” elnevezésű hibrid gerendacsaládot, amit kis fesztávolságok

áthidalására alkalmaznak. Japánban egyébként több, mint 180 trapézlemez-gerincű hibrid gerendahíd készült az elmúlt évtizedekben.

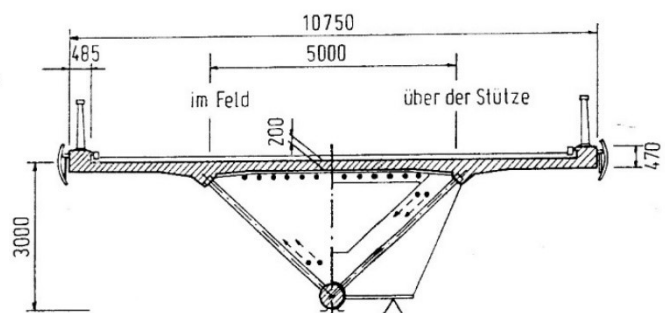
A következőkben néhány példát szeretnék bemutatni a megépült hibrid trapézlemez-gerincű hidak közül. A kezdetektől indulva, először az úttörő francia hidakat fogom bemutatni, majd a Japánban épített műtárgyak közül mutatok be néhányat, köztük a világ eddig épült legnagyobb támaszközű hibrid hídját. Az eddigiek mind gerendahidak, azonban a megvalósultak hibrid hidak közt találhatóak ferdekábeles és extradosed hidak is, úgyhogy ezt követően ezek közül választok ki két szerkezetet – ami annál is inkább lényeges, mivel az egyik ezek közül Magyarországon található.

Az első ilyen kialakítású híd Franciaországban, a Charente folyó felett épült (Pont de Cognac), és 1986-ban készült el. A híd három támaszközű, a középső nyílása a legnagyobb, teljes hossza  $31+43+31=105$  m. A legfontosabb paraméterek: 2,25 m magas szekrénykeresztmetszet, az acél trapézlemez vastagsága a tartó hossza mentén konstans 8 mm, magassága 1,77 m, hullámhossza 1,4 m, a hullámmélység pedig 150 mm. A trapézlemez-profil hajlás szöge  $35^\circ$ . A híd külsőkábeles feszítéssel készült, a felszerkezet keresztmetszetét a 8. ábra mutatja.



8. ábra: Pont de Cognac, Charente-híd keresztmetszete [9].

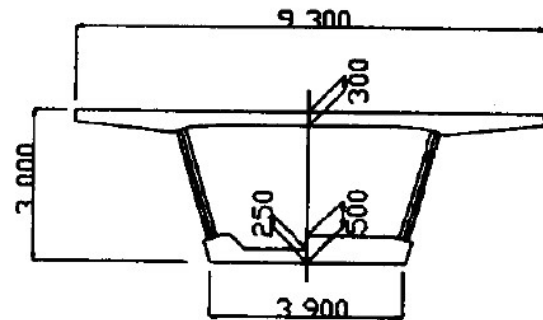
A második trapézlemez-gerincű híd a Viaduc de Maupré szintén Franciaországban épült, 1987-ben. A 324,45 m hosszú híd hét nyílású, 41,00 és 53,55 m közötti nyílásméretekkel. A híd keresztmetszete a 9. ábrán látható, a felső öve vasbeton, a két gerinc pedig acél trapézlemez, amelyek alul egy acél csőbe futnak be, ez az alsó 610 mm átmérőjű CHS szelvény betonnal van kiöntve.



9. ábra: Viaduc de Maupré híd és keresztmetszete [10].

Szerkezeti magassága a hossz tengelye mentén állandó 3,1 méter magas. A trapézlemez hullámhossza itt 1,080 m, a hullámmélység 180 mm, az egyenes lemez hossz 300 mm, a törésszög  $\alpha=36,87^\circ$  a lemez vastagsága 8 mm.

Legnagyobb számban Japánban épült hibrid szerkezetű híd, az első 1993-ban készült el (Shinkai-híd, Niigata tartományban). A második a Matsunoki-híd volt, amelyet 1996-ban adták át a forgalomnak. A híd teljes hossza 210 m, öt támaszközü, a nyílások hossza 27,4-45,5 m között változik. A keresztmetszetét a 10. ábrán láthatjuk, hibrid hidak tipikus felszerkezete ez, vasbeton övekkel és trapézlemez-gerinccel.



**10. ábra:** Matsunoki-híd [11] és keresztmetszete [9].

A szekrénytartó magassága 3,00 méter, a pályalemez 9,30 méter széles. A híd külsőkábeles feszítéssel készült. A gerinclemez hullámhossza 1120 mm, a hullám mélysége 150 mm, a lemezvastagság pedig 9 és 12 mm között változik. A trapézlemez-gerincek átlapoló egyszerű nyírt NF csavaros kapcsolattal lettek összekapcsolva, a vasbeton övek és a gerinc között a nyíróerőt fejes csapok veszik fel.

A világ eddigi legnagyobb támaszközü hibrid hídja szintén Japánban épült, 2017-ben. Az Aigawa-híd legnagyobb fesztávja 179 m. A műtárgy a 11. ábrán látható.

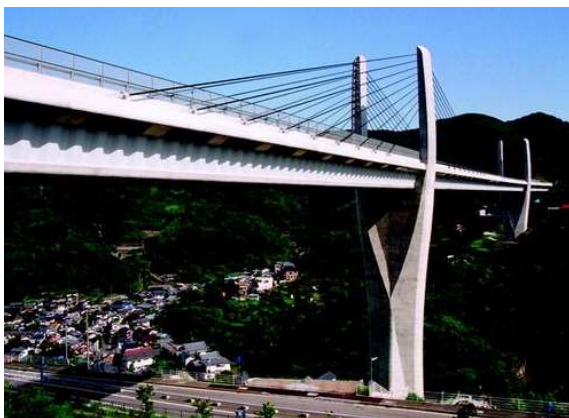


**11. ábra:** Aigawa-híd (Japán).

A híd Osaka prefektúrában Ibaraki város mellett az Aigawa folyót átszeli két irányban, egyik irányban a híd 636 méter (50,4+120,0+179,0+99,5+3,50.0+33,9) a másik irányban pedig 545,5 méter (65,4+142,0+170,0+120,5+44,4) hosszú. Ezen felül az Aigawa-híd 11,5 méteres tartómagasságát tekintve is a világelső.

Hibrid acél trapézlemez-gerincű felszerkezeteket alkalmaznak ferdekábeles és feszített-függesztett hidaknál is (angolul extradosed hidak), nem csak feszített gerenda, illetve szekrény keresztmetszetű hidaknál. A világ első három acél trapézlemez-gerinccel megépült feszített-függesztett hídja közül az egyik Magyarországon található: a Móra Ferenc Tisza-híd, a másik kettő pedig Japán.

A feszített-függesztett hidak átmenetet jelentenek a feszített gerendahidak és a ferdekábeles hidak között, ötvözve a két kialakítás előnyeit. Az extradosed hidak legfeljebb első látásra tűnnek ferdekábeles hidaknak, szerkezeti viselkedésük lényegesen eltér. A feszített-függesztett hidak az ébredő erőket a hídszerkezet teljes hosszában végigvezetett kábelekkel veszik fel, amelyeket a nagyobb támaszköz biztosítása érdekében egy (vagy több) pilonra vezetnek fel, és fontos, hogy ez esetben a kábeleket a szerkezet két végén feszítik meg. A ferdekábeles hidak viszont a vízszintes és függőleges erőket is különálló kábelekkel veszik fel, amelyek külön-külön vannak a pályalemezhez, valamint a pilonokhoz rögzítve, így a fesztávolság növekedésével egyre magasabb pilonokra van szükség. Kedvező, hogy feszített-függesztett hidak jelentősen alacsonyabb pilonokkal is képesek ugyanazt az erőt ellentartani, mint a ferdekábeles hidak.



**12. ábra:** Himi Yume híd (Japán) [12]



**13. ábra:** Ritto híd (Japán) [13]

Az első acél trapézlemez-gerincet alkalmazó hibrid feszített-függesztett híd Japánban készült el 2004-ben: Himi Yume híd (Nagasaki). És szintén Japán a második ilyen szerkezet is, a Ritto híd (vagy Ohmi Ohtori híd), amelynek előbb kezdődött az építése, azonban végül később készült el, mint a Himi Yume híd. (12-13. ábra)

Ilyen szerkezeti kialakítású a Móra Ferenc híd is, ami Szeged mellett a Tisza fölött vezeti át az M43-as autópályát. (14. ábra)



**14. ábra:** Móra Ferenc Tisza-híd.

A keresztmetszet változó magasságú három cellás szekrénytartó (4-6 m magas). A híd teljes hossza 661,20 m (jobb ártér: 52+64+64+52 m, mederhíd: 90+180+90 m, bal ártéri híd: 52 m). A hidat 2011-ben adták át a forgalomnak.

Ferdekábéles hídként eddig egy hibrid felszerkezetű híd épült, a japán Yahagi-gawa híd, amely 2005-ben készült el.

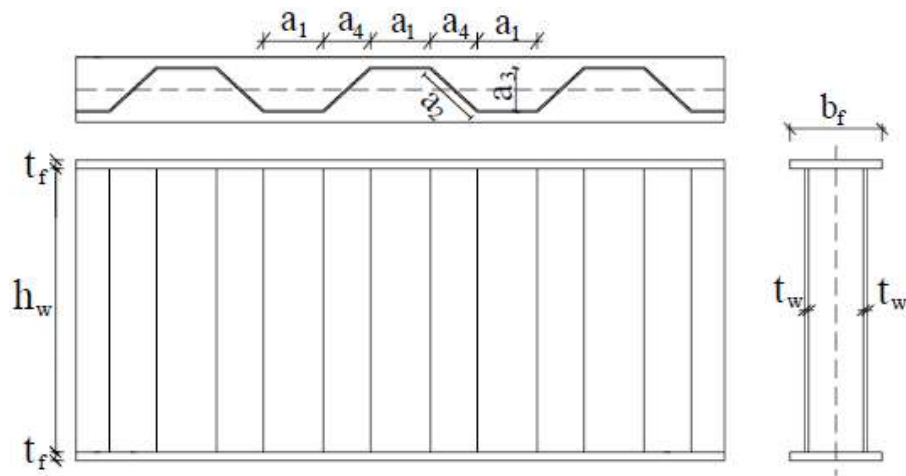


**15. ábra:** Paks-Kalocsa Duna-híd látványterve.

A felsorolást lehetne tovább bővíteni, hiszen rengeteg szép példa van még ilyen konstrukciókra, a bemutatás végén még azt emelném ki, hogy Magyarországon jelenleg is építés alatt áll egy hibrid híd, a Paks-Kalocsa Duna-híd, amely a tervek szerint 2024-re készül el. (15. ábra) A kilenc nyílású híd teljes hossza 946,2 m. A mederhíd feszített-függesztett hibrid szerkezetű híd, a jobb és bal parti ártéri hidak acél keresztmetszettel készülő gerendahidak lesznek.

### 2.3. Trapézlemez-gerincű tartók jelölésrendszere

A trapézlemez-gerincű tartók kialakítása egyedi, jelölésrendszere is eltér a hagyományos I-tartóktól, melyet a 16. ábra mutat be.



**16. ábra:** Trapézlemez-gerincű tartók alkalmazott jelölései.

A diplomamunka további részében a 16. ábra szerinti jelöléseket fogom alkalmazni.

### 3. Eddigi javaslatok a kifordulási kritikus nyomaték számítására

Trapézlemezgerincű tartók sok szempontból eltérnek a hagyományos síklemez-gerincű tartóktól, viselkedésük speciális, ezért a kifordulási ellenállásuk meghatározása is külön vizsgálatokat igényel. A következőkben az eddigi ezzel kapcsolatos korábbi kutatások és kísérletek kerülnek bemutatásra. Trapézlemez-gerincű tartók kifordulásával hozzávetőlegesen harminc éve foglalkoznak. Azóta is sok kutatás – többnyire numerikus szimulációk, kisebb részben pedig laboratóriumi kísérletek – foglalkozott a témával, és az eredmények alapján a méretezési eljárások kidolgozása is megkezdődött. A trapézlemez-gerincű tartók rugalmas kritikus nyomatékának kiszámítására több elmélet is született az idők folyamán. Több kutató megállapította és numerikus kísérletekkel igazolta, hogy a trapézlemez-gerincű tartók rugalmas kritikus nyomatéka nagyobb, mint a hagyományos síklemez-gerincű tartóké. Többek között Sayed-Ahmed (2005), Moon és társai (2009), Nguyen és társai (2010), Zhang és társai (2011), Larsson és Persson (2013), Ilanovsky (2015), valamint Lopes és társai (2017) foglalkozott a témával. Abban, hogy mi lehet a többlet oka, mai napig nincs egyetértés, a kutatók más-más keresztmetszeti jellemző módosításával próbálták a növekményt figyelembe venni a kézi számítás során. A BME Hidak és Szerkezetek Tanszéken a témában végzett korábbi vizsgálatok eredményei [1] azt mutatták, hogy Lopes és társai ajánlása adja a legpontosabb eredményt.

#### 3.1. Lindner ajánlása

Az első numerikus és analitikus tanulmányok Németországban, illetve Ausztriában születtek az 1980-as évektől kezdve, ezek közül kiemelkednek Lindner eredményei. Lindner a trapézlemez-gerincű, kéttámaszú, konstans nyomatékkal terhelt I-tartó rugalmas kritikus nyomatékának számítási módját úgy határozta meg, hogy a hagyományos, síklemez-gerincű I-tartókra vonatkozó analitikus képletet módosította. Elméleti megfontolásait és javaslatait igazolták a kísérleti eredményei is, amelyek szerint a trapézlemez-gerincű tartók rugalmas kritikus nyomatéka nagyobb, mint az azonos tulajdonságokkal rendelkező síklemez-gerincű gerendáké. Lindner ezt a növekedést az öblösödési modulus számítása során vette figyelembe, az adott keresztmetszethez tartozó síklemez-gerincű tartókra vonatkozó öblösödési modulus értékét növelte meg egy olyan taggal, ami a hosszát is tartalmazza az (1) egyenlet szerint.

Lindner javaslata [14] szerint a (2) és (3) egyenlettel az  $u_x$  és  $c_w$  tényezőket kell kiszámolni, majd a módosított öblösödési modulus behelyettesítésével lehet alkalmazni a síklemez-gerincű tartókra vonatkozó formulát:

$$I_w = I_{w,flat} + c_w \cdot \frac{L^2}{E \cdot \pi^2} \quad (1)$$

$$c_w = \frac{a_3^2 \cdot (h_w + t_f)^2}{c_1 \cdot u_x \cdot (a_1 + a_4)} \quad (2)$$

$$u_x = \frac{(h_w + t_f)}{2 \cdot G \cdot a_1 \cdot t_w} + \frac{(h_w + t_f)^2 \cdot (a_1 + a_4)^3}{c_2 \cdot a_1^2 \cdot E \cdot b_f \cdot t_f^3} \quad (3)$$

ahol:

$I_{w,flat}$  a síklemez-gerincű tartókra vonatkozó öblösödési modulus,

$c_1=8$  és  $c_2=25$  javasolt paraméterek,  $E$  a rugalmassági,  $G$  a nyírási modulus,

$L, a_1, a_3, a_4, h_w, t_w, t_f$  és  $b_f$  paraméterek geometriai jellemzők a 16. ábra szerint.

A változtatás tehát valójában csak a torzulási vagy öblösödési moduluszt érintette, amelynek meghatározására új képletet javasolt trapézlemez-gerincű tartók esetére, a rugalmas kritikus nyomtérk meghatározási képletének többi része nem változott, a többi keresztmetszeti állandót nem módosította.

### 3.2. Larsson és Persson ajánlása

Lindner után Moon és társai (2009), Nguyen és társai (2010), Zhang és társai (2011) és Ibrahim (2014) is javaslatot tettek a rugalmas kritikus nyomtérk növekményének figyelembevételére, ám Larsson és Persson 2013-as átfogó numerikus tanulmányából az derült ki, hogy továbbra is Lindner által javasolt képlet adta a legpontosabb közelítést.

Ebben a kutatásban Larsson és Persson [15] átalakította a formulát és Lindnerrel ellentétben nem az öblösödési modulus növelték, hanem a csavarási inercianyomtérkhez rendeltek egy plusz tagot, és azzal vették figyelembe a trapézlemez-gerincnek köszönhető többlet merevséget, a (4) egyenlet szerint. A két változattól ugyanazt az eredményt kapjuk, ilyen értelemben nem történt változás, azonban ezzel a módosítással a keresztmetszeti jellemzők egyike sem függött többé a tartó hosszától, ami elméleti szempontból sokkal logikusabb volt.

$$I_t = I_{t,flat} + \frac{c_w}{G} \quad (4)$$

A  $c_w$  ebben a képletben is a trapézlemez-gerincű tartókra vonatkozó korrekciós tényezőt jelenti, amit Lindner bevezetett,  $G$  pedig a nyírási modulus.



### 3.3. Lopes és társai ajánlása

Fontos megemlíteni továbbá Lopes és társainak kutatását [16], amiben szinuszhullám- és trapézlemez-gerincű tartókat vizsgáltak. Ez a kutatás többféle terhelési viszony esetén vizsgálta a tartókat, és a korábbi tanulmányok eredményeit is felhasználva új javaslatot tett a vetemedési és torziós állandók meghatározására. Egy kiterjedt numerikus tanulmány során változatos trapézlemez kialakítású és hosszú tartókat vizsgáltak és kimutatta, hogy a javasolt módosítások a profillemez-gerincű tartók (WCB) hajlítószilárdságának pontosabb előrejelzéséhez vezetnek. Lopes a Lindner által javasolt tényezőktől gyakorlatilag annyiban tért el, hogy  $c_1=22$  és  $c_2=300$ -ra módosította a paramétereket, illetve az öblösödési modulus módosítása helyett a Larsson és Persson szerinti csavarási inercianyomatékkal dolgozott. A módosított tényezők felhasználásával, ezután vissza lehetett térni az Eurocode által is javasolt képlethez a rugalmas kritikus nyomaték meghatározásához:

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{(k \cdot L)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \cdot \frac{I_w}{I_z} + \frac{(k \cdot L)^2 \cdot G \cdot I_t}{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}} \quad (5)$$

ahol,

$L$ : a tartó hossza,

$E$ : a rugalmassági modulus,

$G$ : a nyírási modulus,

$I_z$ : a gyenge tengely körüli inercianyomaték,

$I_t$ : a csavarási inercianyomaték,

$I_w$ : a torzulási (öblösödési) modulus,

$k$ : a végkeresztmetszetek elfordulás elleni megfogását jellemző szám, a kifordulás síkjára merőleges tengely körül: mindkét vég teljesértékű megfogása esetén  $k=0,5$  és két szabad rúdvég esetén  $k=1,0$ ,

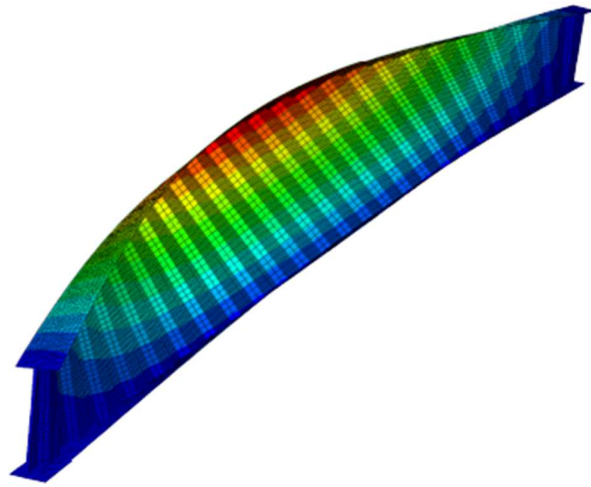
$k_w$ : a végkeresztmetszetek vetemedés (öblösödés) elleni megfogását jellemző szám, mindkét vég teljes értékű megfogása esetén  $k_w=0,5$  és két szabad rúdvég esetén  $k_w=1,0$ .

### 3.4. További kutatások eredményei

Guo és Papangelis 2018-as tanulmányukban [19] a trapézlemez-gerincű és síklemez-gerincű tartókat vizsgálta és hasonlította össze. A kutatás során csavaró nyomatékkal terhelték a gerendákat és arra az eredményre jutottak, hogy a csavarási inercia lényegesen nagyobb trapézlemez-gerincű tartóknál, azonban az öblösödési modulus eltérése jóval kisebb a kétféle

gerinckialakítás esetén. Ez is megerősítette Larrson és Persson módosításának helyességét, az elméleti indoklásokon túl a keresztmetszeti jellemzők ily módon történő változtatása a kutatások alapján jobban leírja a valós szerkezeti viselkedést.

Természetesen más javaslatok is felmerültek a kérdés kezelésére, Sayed-Ahmed (2005) egyenértékű gerincvastagságot ajánlott, Moon és társai (2009), Nguyen és társai (2010), Kazemi (2010) és Ibrahim (2014) a nyírási modulus csökkentésével vették volna figyelembe a trapézlemez hatását, Ilanovsky (2015) pedig egy egyszerű szorzótényező segítségével módosította volna a síklemez-gerincű tartóhoz tartozó rugalmas kritikus nyomatókat.



**17. ábra:** Trapézlemez-gerincű tartó kifordulásvizsgálatához alkalmazott numerikus modell [15].

A kutatók különböző teher, - és támaszelrendezésekkel dolgoztak, és a rugalmas kritikus nyomatók vizsgálata közben egyéb feltételezéseket is tettek. Moon és társai elméleti levezetései és numerikus kísérletei egyaránt konstans nyomatókkal terhelt kéttámaszú trapézlemez-gerincű tartókkal dolgoztak. Lindner kutatásából kiindulva az öblösödési modulus meghatározására új, elméleti alapokon nyugvó módszert határoztak meg, és megmutatták, hogy Lindner öblösödési modulusa nem használható, amennyiben a trapézlemez hajlítási sugara 15 foknál nagyobb. Ezenkívül a Lindner által használt, rugalmas kritikus nyomatókra vonatkozó képletben szereplő gyenge tengely körüli inercianyomatóki tagban elhanyagolták a gerinclemez hozzájárulását, amit azóta több kutató szintén helyesnek talált. Az elméleti megfontolásaikat a továbbiakban az elvégzett numerikus számításaik alátámasztották, és ismét az derült ki a vizsgálatokból, hogy a kifordulási ellenállása a tartónak nagyobb, amennyiben a síklemez helyett trapézlemezt alkalmazunk.

Nguyen és társainak 2010-es vizsgálatai szerint 21-29% növekedésre lehet számítani konstans nyomatóki igénybevétel esetén. Tehát bár az EN1993-1-5 szabvány szerinti stabilitási görbe

ugyanúgy használható, mint síklemez-gerincű tartók esetén, de a szerkezet messze nem lesz kihasználva.

Moon és társai 2013-ban folytatták a kísérleteket trapézlemez-gerincű tartók kifordulási viselkedésével kapcsolatban, ekkor már konstans helyett lineárisan változó nyomatóéki igénybevétellel terhelték a kéttámaszú gerendákat. Amikor a tartókat tiszta hajlítónyomatóékkal terhelték, a gerenda keresztmetszetei elcsavarodtak, egyértelmű volt, hogy az elcsavarodás oka a trapézlemez külpontosságában rejlik. Ezt a jelenséget korábban Abbas és társai is megfigyelték. Moon és társai ezért azt kezdték vizsgálni, hogy különböző profil kialakításoknak, a kezdeti geometriai imperfekciónak és a maradó feszültségeknek milyen hatása van a szerkezet kifordulási ellenállására és szerkezeti viselkedésére. A kísérleti eredményeik alapján azt a megállapítást tették, hogy a kifordulási ellenállás meghatározására az EN1993-1-5 szabvány „b” görbéje megfelelő lineáris nyomatóéki ábra esetén.

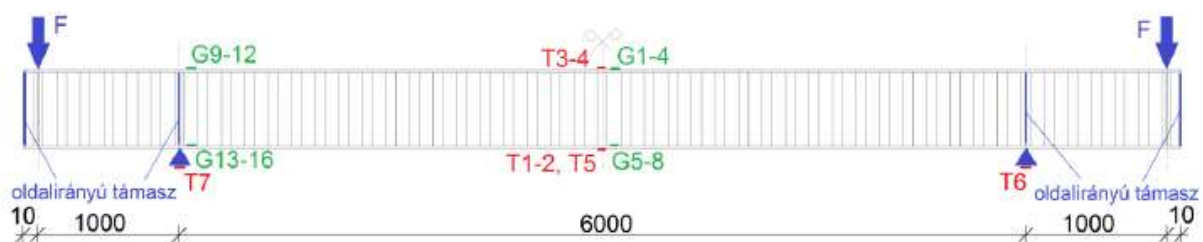
## 4. Kísérletek a kifordulási ellenállás meghatározására

### 4.1. Külföldi kísérletek

Trapézlemez-gerincű tartók rugalmas kritikus nyomatékán túl természetesen a kifordulási ellenállás vizsgálatára is voltak korábbi kutatások, bár kétségtelenül kevesebb tanulmány foglalkozott ezzel a kérdéssel. Ráadásul egyelőre nem sok laboratóriumi kísérletre került sor, többnyire numerikus eredmények érhetőek el a nemzetközi szakirodalomban. Kubo és Watanabe (2007) kilenc hárompontos nyomatékkal terhelt trapézlemez-gerincű tartót vizsgált laboratóriumban, Hannebauer (2008), valamint Pimenta és társai (2015) három, illetve négy szinuszhullám-gerincű tartót vizsgált, Zhang és társai (2017) pedig négy szinuszhullám-gerincű konzolos elrendezésű tartóval végzett kísérleteket, a terhelés koncentrált erőbevezetés volt a tartó végén.

### 4.2. Kísérletek a BME Hidak és Szerkezetek Tanszéken

Összességében az látható a nemzetközi szakirodalom alapján, hogy bár kétségtelenül nagy számú kutatás foglalkozott az elmúlt évtizedekben a trapézlemez-gerincű tartókkal, nem sok olyan kísérletsorozat van, amelynek fókuszában ezen szerkezetek kifordulási ellenállásának kísérleti meghatározása lett volna. Ráadásul a nemzetközi szakirodalomban fellelhető vizsgálatok többnyire kizárólag numerikus szimuláción alapultak, és tényleges fizikai kísérleti eredmények általában nem igazolták az egyes elméleti levezetések. Ennek orvoslására a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Hidak és Szerkezetek Tanszékén 2019-ben egy kiterjedt kísérleti kutatási programot végeztek tizenkettő teljesméretű próbatesten, melyek keretében elsődleges cél a legyártott tartók imperfekcióinak, valamint a kifordulási ellenállásuknak a meghatározása volt.



18. ábra: Kísérleti elrendezés a kifordulási ellenállás meghatározására [1].

Mivel a megvalósult kísérleti vizsgálatok darabszáma egyelőre csekély, így nincsenek olyan eljárások, amelyek alapján az acél trapézlemez-gerincű tartók kifordulási ellenállása meghatározható lenne a tervezési feladatokban. A kísérletek előtt ezért mindössze a hagyományos, síklemez-gerincű tartókból kiindulva lehetett megbecsülni a várható teherbírást. A szakirodalmi adatok alapján 25%-os többlet teherbírásra számítottak a síklemez-gerincű

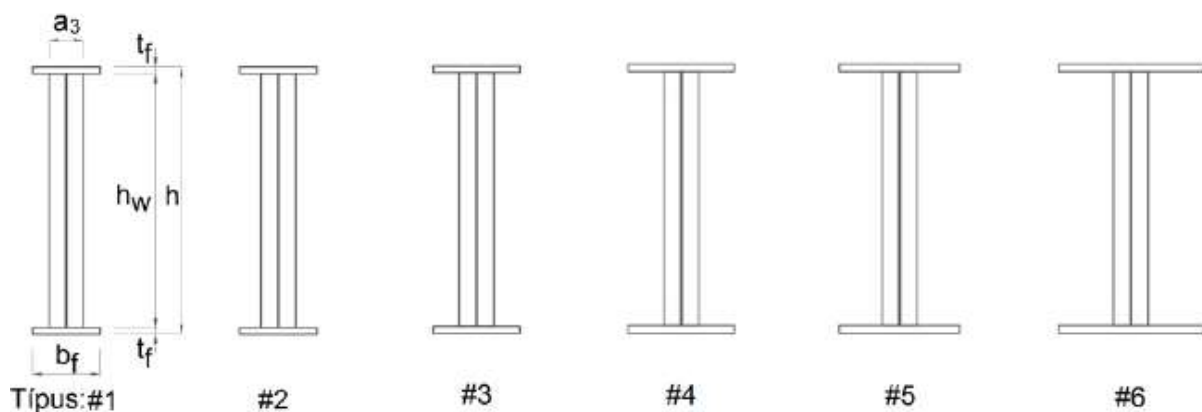
tartókhöz képest. A várható érték megbecslése során az anyagminőségeket a várható értékükkel vették figyelembe.

A próbatestek mindegyike 8 méteres volt, mindegyiket kéttámaszú konzolos tartóként terhelték, a kifordulásra érzékeny középső szakasz 6 méteres volt. A kísérleti elrendezést a 18. ábra mutatja be. A vizsgálati programban hatféle karcsúságot vizsgáltak, mindegyik keresztmetszet kialakításból 2 db volt, hogy az eredmények megbízhatósága is tesztelve legyen a kísérletek során az ismétlések révén. A hatféle gerendában egyedül az övlemezek méretében volt különbség, a gerinclemez vastagsága és a gerendák magassága minden esetben konstans volt, ugyanígy a trapézprofil sem módosult. Ennek az oka az, hogy az ún. harmonikahatás miatt a trapézlemez-gerinc hozzájárulása a nyomatéki ellenálláshoz elhanyagolható mértékű.

A próbatestekben (19. ábra) az alábbi övlemez méretek kerültek alkalmazásra:

- a) 300 – 16,
- b) 250 – 16,
- c) 220 – 16,
- d) 180 – 14,
- e) 160 – 14,
- f) 140 – 14.

A gerinclemez vastagsága minden próbatest esetén 6 mm, magassága 520 mm volt. A trapézprofil paramétereit és jelölését a 6.1. fejezet 24. ábráján láthatjuk ( $\alpha=45^\circ$ ,  $a_1=a_2=98$  mm,  $a_3=a_4=69$  mm).



**19. ábra:** Próbatestek keresztmetszeti kialakítása [1].

Az erőbevezetések helyénél és a függőleges támaszkeresztmetszeteknél oldalirányú megtámasztást alkalmaztak, valamint függőleges merevítőbordákkal akadályozták meg a szerkezet koncentrált erőre való tönkremenetelét. A konzolok nyírési teherbírását X-alakú rácsoszással növelték (kivéve a 4/2 próbatestnél), hogy a tönkremenetel semmiképpen se ott

következzen be (nyírási horpadással). Ezzel a kialakítással a függőleges támaszoknál a keresztmetszet elcsavarodása, illetve öblösödése korlátozva volt kifordulás szempontjából.

A kísérletek során egyrészt a középső keresztmetszet felhajlását, oldalirányú eltolódását és elcsavarodását, másrészt a támaszok függőleges mozgását, harmadrészt a középső és a támasz keresztmetszetekben a tartó alsó és felső övlemezén alakváltozását mérték nyúlásmérő bélyegek segítségével. A kísérletek előtt a középső keresztmetszet mérőműszereinek helyzete geodéziai mérésekkel lett meghatározva. A próbatesteket minden esetben statikus terheléssel terhelték.

A kísérlet eredményei erő-elmozdulás diagramok, valamint jellemző tönkremeneteli módok. Majd anyagvizsgálati kísérleteket végeztek a deformációt nem szenvedett acéllemezekből, hogy így pontos információkhoz jussanak az anyag fizikai paramétereit illetően. Az EN1993-1-1 szabvány [21] szerint a kísérletben alkalmazott gerendák övlemezei második, harmadik, valamint negyedik osztályba tartoztak. A tönkremenetel négy próbatesttípus esetén kifordulás volt, egy esetben a kifordulást követően a leszállóágban megjelent az övlemez horpadása, és egy esetben a kifordulás és az övlemez horpadása egyidőben alakult ki, interakciós tönkremenetel volt megfigyelhető.

A kísérlet során kapott kifordulási ellenállás értékekből meghatározták a kifordulási csökkentő tényezőket az egyes próbatestek esetén, és meghatározták a rugalmas kritikus nyomatékot Lindner [14], Larsson és Persson [15] – ez a kettő számértékét tekintve természetesen egybecsengett – illetve Lopes és társai [16] javaslatai alapján, és ebből kiszámították a viszonyított karcsúságokat. A csökkentő tényező a (7) egyenlet átrendezésével kapható meg, a kifordulási ellenállást a kísérlet során határozták meg, a korlátozatlan folyás határállapotához tartozó nyomaték pedig a (6) egyenlet szerint számítható.

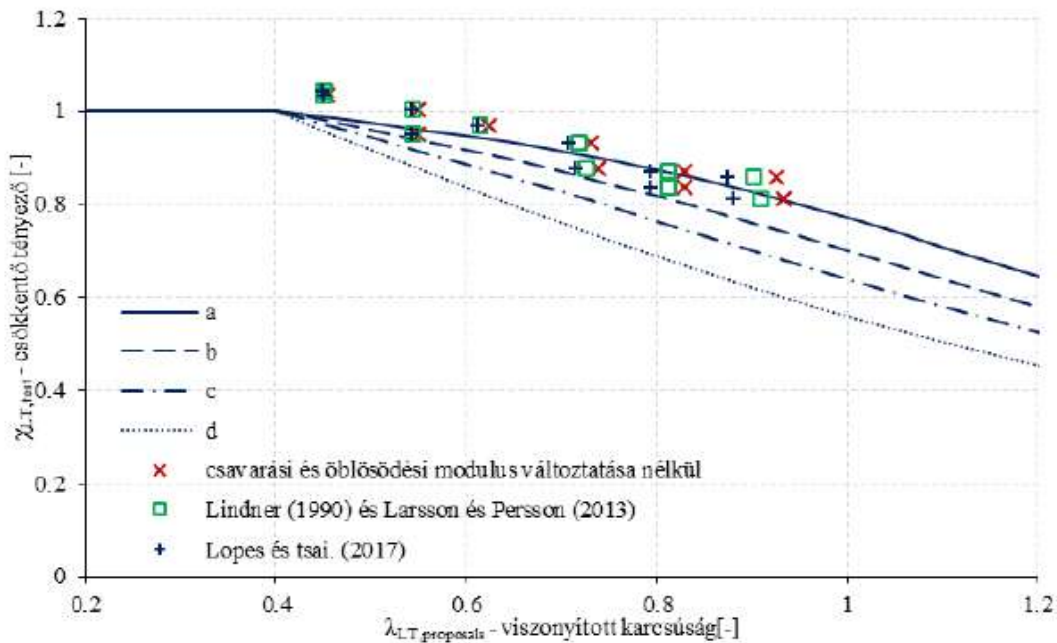
$$M_y = b_f \cdot t_{f,eff} \cdot f_{yf} \cdot (h_w + t_f) \quad (6)$$

$$M_{b,R} = \chi_{LT} \cdot M_y \quad (7)$$

A viszonyított karcsúság számításához a 8. egyenlet használandó, ahol  $M_{cr}$  a rugalmas kritikus nyomatékot jelenti.

$$\lambda_{LT} = \sqrt{\frac{M_y}{M_{cr}}} \quad (8)$$

A kísérleti eredmények alapján számított eredményeket a 20. ábra mutatja az EN1993-1-1 szabvány [21] kifordulási görbéivel összehasonlítva.



**20. ábra:** A szakmai ajánlások és az EN1993-1-1 kifordulási görbék [1].

A statisztikai kiértékelésből az derült ki, hogy minden esetben a „b” kifordulási görbe adta a legpontosabb közelítést úgy, hogy még az eredmények a biztonság oldalán maradjanak. Továbbá azt mutatták az eredmények, hogy akkor a legkisebb a szórása és a kifordulási görbektől való eltérése az eredményeknek, amennyiben Lopes és társainak ajánlásával dolgozunk a rugalmas kritikus nyomaték meghatározásakor. A statisztikai kiértékelés pontos eredményei az 1. táblázatban láthatók.

	$M_{test}/M_{b,R,w/o\ mod}$				$M_{test}/M_{b,R,Lindner}$				$M_{test}/M_{b,R,Lopes\ et\ al.}$			
	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
Átlag	1.020	1.070	1.124	1.216	1.014	1.061	1.113	1.201	1.008	<b>1.053</b>	1.102	1.186
Szórás	0.030	0.036	0.060	0.107	0.031	0.032	0.052	0.097	0.034	<b>0.028</b>	0.044	0.084
Relatív szórás	0.030	0.033	0.053	0.088	0.031	0.030	0.047	0.081	0.034	<b>0.027</b>	0.040	0.071
Mín	0.970	1.011	1.038	1.083	0.962	1.008	1.034	1.079	0.952	<b>1.007</b>	1.032	1.076
Max	1.057	1.152	1.253	1.419	1.056	1.131	1.227	1.385	1.056	<b>1.108</b>	1.197	1.346

**1. táblázat:** Statisztikai kiértékelés [1] eredménye EN1993-1-1 kifordulási görbék és szakirodalmi ajánlások alapján.

## 5. Méretezéselméleti módszerek áttekintése

A diplomamunkámban a megfelelő kifordulási görbét statisztikai és méretezéselméleti oldalról fogom meghatározni, ezért áttekintettem a megbízhatósági módszereket és a parciális tényezők meghatározásának módszereit, melyek közül a diplomamunkámban alkalmazott módszereket ebben a fejezetben összefoglalom.

### 5.1. A tervezési módszerek méretezéselméleti hátterének áttekintése

A méretezési módszerek sokat változtak a történelem során, a 19. századot megelőzően alapvetően tapasztalati alapú építési tevékenységekkel lehetett találkozni, majd a Newton-féle mechanika alapján megjelentek az első erőtan számítások és determinisztikus módszerekkel kezdtek dolgozni. A kor építőmérnökei biztonsági tényezőkkel próbálták lefedni a bizonytalanságokat, de ezek még nem valószínűség elméleti alapon kerültek megfontolásra. A 20. századtól a 2. táblázatban látható kategóriákba lehet sorolni a méretezési módszereket.

<b>TERVEZÉSI MÓDSZEREK</b>		
<b>egyetlen</b>	<b>parciális</b>	<b>teljes valószínűségi módszerek</b>
<b>biztonsági tényezős módszerek</b>		
a) Megengedett feszültségek módszere b) Törési biztonságon alapuló módszer I.	a) Törési biztonságon alapuló módszer II. b) Fél-valószínűségi módszer ➤ Parciális tényezős módszer (Eurocode, MSZ)	pl. Megbízhatósági módszer
determinisztikus eljárások		valószínűségi eljárások

**2. táblázat:** Méretezéselméleti módszerek áttekintése.

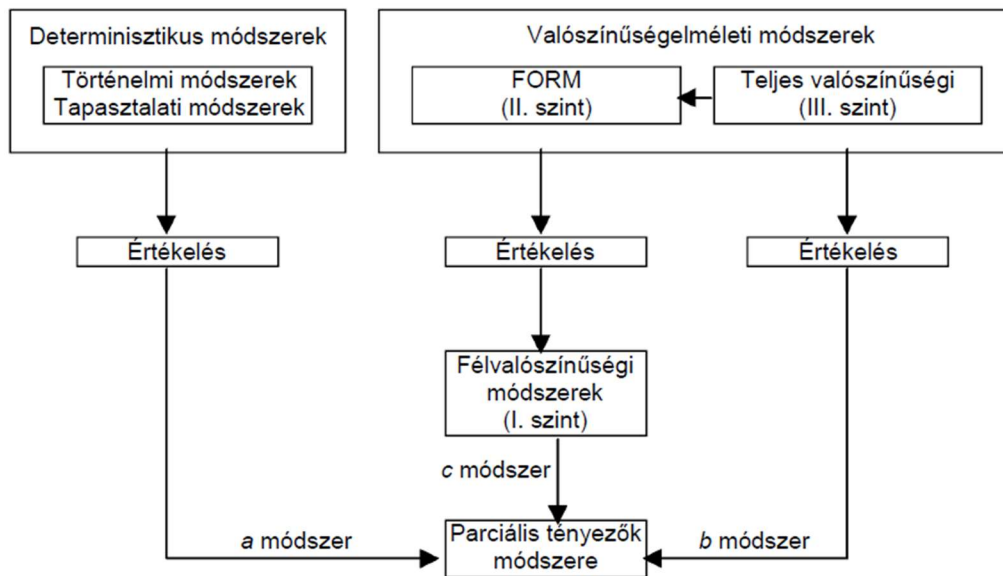
Az egyetlen biztonsági tényezős módszerek tulajdonképpen determinisztikus módszerek, Magyarországon 1949-ig volt érvényben, szemben Nyugat-Európával, ahol 1990-ig lehetett találkozni ezzel a módszerrel. Itt a teljes kockázatot egyetlen biztonsági tényező fedi le, kezdetben ezt kizárólag tapasztalati alapon vették fel, majd később a tervezési változók becsült statisztikai jellemzői alapján. Két al módszer sorolható ide, a megengedett feszültségek módszere és a törési biztonságon alapuló módszer I.

A parciális biztonsági tényezős módszerek esetében a törési biztonságon alapuló módszer II. még determinisztikus módszer, azonban az egyes változóknak már saját biztonsági tényezője van a hatás és ellenállás oldalon egyaránt. A fél-valószínűségi módszerek, amelyek közé az Eurocode méretezési eljárásai is tartoznak, bár formailag determinisztikus eljárások, ebben az esetben a parciális és biztonsági tényezők meghatározása már valószínűségelméleti alapokon



történik. A továbblépést a teljes valószínűségi módszer jelenti, ezt azonban már csak speciális helyzetekben szokás alkalmazni. Ilyenkor a hatás- és anyagmodellek sztochasztikus jellegűek, a tervezési változók valószínűségi változók, és egy ilyen eljáráshoz ismerni kell a tényleges terhelési helyzeteket. Általános tervezési feladatok esetén sokkal egyszerűbben használhatóbbak ehelyett a félvalószínűségi módszerek és a legtöbb méretezési problémának megoldása során az alkalmazásuk már elegendő pontosságúnak tekinthető.

A félvalószínűségi módszerben alkalmazott parciális tényezők meghatározási módjára is több eljárás alkalmazható, melyeket a 21. ábra foglalja össze.



21. ábra: MSZ EN 1990 szerinti megbízhatósági módszerek [22].

A determinisztikus vizsgálat eredményei alapján az EN1993-1-1 szabvány kifordulási, illetve kihajlási görbéinek biztonsági szintjének meghatározásához a szabvány félvalószínűségi eljárását fogom alkalmazni (I. szint).

## 5.2. Tönkremeneteli valószínűség és a $\beta$ megbízhatósági index

Az EN 1990 [20] szerint egy szerkezeti elem vagy az egész szerkezet megbízhatósága a tönkremenetel valószínűségének ( $P_f$ ) a megbízhatósági index ( $\beta$ ) segítségével történő szabályozásával biztosítható. A meghatározott módszertan alkalmazásával, a szerkezetnek vagy egy szerkezeti elemnek biztonságosan ellen kell állnia a terhelésnek, és meg kell felelniük a szabvány által meghatározott valamennyi követelménynek.

Annak érdekében, hogy elkerüljük a szerkezet tönkremenetelét, az ellenállás oldalnak ( $R$ ) mindig nagyobbnak, vagy egyenlőnek kell lennie a hatás oldalnál ( $E$ ). Ezért a tönkremenetel

valószínűsége úgy definiálható, mint annak a valószínűsége, hogy a hatás oldal nagyobb lesz az ellenállás oldalánál.

$$P_f = P(R < E) = P(g < 0) \quad (9)$$

A  $g$  határállapot függvény az ellenállás és a hatásoldal különbségként van definiálva ( $g=R-E$ ), amennyiben negatív értéket eredményez, akkor a szerkezet nem felel meg. A szabvány feltételezése értelmében a határállapot függvény Gauss eloszlású, a várható értékét  $\mu_g$ -vel jelölik, a szórását pedig  $\sigma_g$ -vel. Ezek alapján a megbízhatósági indexet a következő egyenlet adja meg:

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (10)$$

A  $\beta$  megbízhatósági index és a  $P_f$  kockázat közötti  $P_f = \Phi(-\beta)$  összefüggést a 3. táblázat mutatja, ahol az értékek a standard normál eloszlású függvény alkalmazásával kaphatóak. Az egyenletben a  $\Phi$  a normál eloszlás függvényt szimbolizálja.

$P_f$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
$\beta$	1,282	2,326	3,090	3,719	4,265	4,753	5,199

**3. táblázat:** A  $\beta$  és  $P_f$  közötti összefüggés.

Az EN1990 szabvány a  $\beta$  megbízhatósági index minimális értékét is megadja a referencia időszak függvényében az egyes megbízhatósági osztályokhoz. (4. táblázat)

Megbízhatósági osztály	A $\beta$ minimális értékei	
	1 éves referencia-időszak	50 éves referencia-időszak
RC3	5,2	4,3
RC2	4,7	3,8
RC1	4,2	3,3

**4. táblázat:** A  $\beta$  ajánlott minimum értékei.

A legtöbb hétköznapi szerkezet az RC2-es csoportba tartozik (Lakó- és irodaházak, közösségi épületek, ahol a tönkremenetellel járó kár közepes (pl. irodaház)), ebben az esetben és 50 éves referenciaidőszak esetén olyan szerkezet tervezhető, amelynél a  $\beta$  értéke 3,8 vagy annál nagyobb.

### 5.3. Félvalószínűségi tervezési módszerek – a hatás és ellenállás oldal szétválasztása

Bár a teljes valószínűségi módszer teljes mértékben helytálló, a gyakorlatban nem túl célszerű a használata, sokkal kedvezőbb helyette egy olyan módszer alkalmazása, aminél nem kell ismerni, hogy konkrétan milyen célra fogják alkalmazni az adott szerkezetet, szerkezeti elemet,

és nem kell ismerni a pontos terhelési viszonyokat. Emiatt a hatás és az ellenállás oldal szétválasztására van szükség. Az EN1990 szabvány félvalószínűségi tervezési módszerében a  $\beta$  megbízhatósági index két részre válik szét, az  $\alpha_R$  csak az ellenálláshoz tartozik, az  $\alpha_E$  pedig a hatás oldalon használandó. Az értéküket úgy határozták meg, hogy a teljes megbízhatósági index értéke csak minimálisan változzon, ezért  $\alpha_R=0,8$  és  $\alpha_E=0,7$ . Ezt mutatja be a következő egyenlet:

$$\sqrt{\alpha_R^2 + \alpha_E^2} \cdot \beta = 1,063 \cdot \beta \approx \beta \quad (11)$$

Ezzel a módszerrel az ellenállás oldal a hatásoktól függetlenül megbecsülhető, és e módszer alkalmazása esetén a megfelelő  $\gamma_M$  tényezőket csak az ellenállás modell elemzésével kapjuk meg. Amennyiben ezt a módszert alkalmazzuk, a tönkremenetel definíciója az lesz, ha az aktuális ellenállás kisebb, mint annak tervezési értéke ( $R < R_d$ ), tehát a tönkremenetel valószínűsége az alábbi módon fogalmazható meg:

$$P_f = P(R < R_d) = \Phi(-\alpha_R \cdot \beta) \quad (12)$$

Azaz, RC2 megbízhatósági osztály és 50 éves tervezési élettartam esetén az ellenállás tervezési értéke az ellenállás függvény 0,118%-os alsó kvantiliseként definiálandó, mivel az  $\alpha_R=0,8$  és  $\beta=3,8$ , ezeket behelyettesítve  $\Phi(-0,8 \cdot 3,8) = \Phi(-3,04) = 0,118\%$  adódik, ami azt jelenti, hogy 845 elemből legfeljebb egynek lehet kisebb ellenállása az ellenállás tervezési értékénél.

#### 5.4. Az ellenállási modell meghatározása statisztikai módszerrel az EN 1990 szerint

Az EN1990 szabvány D mellékletében megadott módszer segítségével végezem el a determinisztikus vizsgálat statisztikai kiértékelését. Eszerint egy szerkezeti elem aktuális ellenállása a következő kifejezés szerint kapható meg:

$$r = b \cdot r_t \cdot \delta \quad (13)$$

Ahol  $b$  a korrekciós tényező várható értéke,  $r_t$  az ellenállás elméleti értéke,  $\delta$  pedig a hiba.

Az  $r_t$  elméleti ellenállás az ellenállásfüggvényből számítható, ami azoknak az  $X_i$  alapváltozóknak a függvénye, amelyek befolyásolják az ellenállás értékét. A korrekciós tényező várható értéke ( $b$ ) a mért ellenállások ( $r_{e,i}$ ) és az elméleti értékek ( $r_{t,i}$ ) összehasonlításával számítható.

$$r_t = g_{rt}(X_i) \quad (14)$$

$$b = \frac{\sum r_{e,i} \cdot r_{t,i}}{\sum r_{t,i}^2} \quad (15)$$

Ha az összetartozó  $(r_{t,i}, r_{e,i})$  értékek párokat ábrázoljuk, és az ellenállás függvény tökéletesen pontos, akkor egy 45°-os meredekségű egyenesre fognak illeszkedni a pontok. A gyakorlatban természetesen lesz némi szóródása a pontoknak. A hiba tényező a következő módon számítható minden egyes kísérleti eredmény, vagy numerikus számítás esetén:

$$\delta_i = \frac{r_{e,i}}{b \cdot r_{t,i}} \quad (16)$$

A  $V_\delta$  relatív szórás (CoV: coefficient of variation) az egyedi hiba tényezőkből a következők szerint határozható meg:

$$V_\delta = \sqrt{e^{(s_\Delta^2)} - 1} \quad (17)$$

ahol:

$$s_\Delta^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2 \quad (18)$$

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i \quad (19)$$

$$\Delta_i = \ln(\delta_i) \quad (20)$$

Az egyenletekben  $n$  a kísérletek számát jelenti.

Az EN 1990 D mellékletében meg van adva az is, hogyan kell a kísérleti eredményekből meghatározni az ellenállás karakterisztikus, illetve tervezési értékét. Amennyiben nagyszámú kísérleti eredmény áll rendelkezésünkre, akkor az alábbi kifejezésekkel dolgozhatunk:

$$r_k = b \cdot g_{rt}(X_m) \exp(-k_\infty \cdot Q - 0.5 \cdot Q^2) \quad (21)$$

$$r_d = b \cdot g_{rt}(X_m) \exp(-k_{d,\infty} \cdot Q - 0.5 \cdot Q^2) \quad (22)$$

ahol:

- $g_{rt}(X_m)$  az ellenállás függvény alapján számított elméleti ellenállás
- $k_{d,\infty}=3,04$  (a korábban bemutatott  $\alpha_R \cdot \beta = 0,8 \cdot 3,8 = 3,04$  szorzás eredményeként kapjuk)
- $k_\infty=1,64$  a kísérleti ellenállások alsó 5%-os kvantiliseként definiált karakterisztikus érték, hiszen  $\Phi(1,64) = 1/19,8 = 5,05\%$ , vagyis 20 szerkezeti elemből legfeljebb egynek lehet kisebb ellenállása a karakterisztikus ellenállásnál
- $Q = \sqrt{\ln(V_f^2 + 1)}$  (23)

$V_r$  relatív szórás a  $V_\delta$  és a tervezési változók relatív szórásából  $V_{xi}$  áll össze, amennyiben a CoV értékek kicsik, a következőképpen számítható:

$$V_r^2 = (V_\delta^2 + 1) \cdot \left[ \prod_{j=1}^n (V_{xi}^2 + 1) \right] - 1 \quad (24)$$

A tervezési változók relatív szórásai csak akkor számíthatók a kísérleti eredményekből, ha a kísérletek teljesen lefedik a valóságban előforduló változatokat, ezért általában korábbi kutatások, előzetes adatok alapján vehetők fel. Most a JCSS [26] javaslatai alapján az alábbiakat alkalmaztam:

$$V_t = 0,05 \quad \text{- lemezvastagság} \quad (25)$$

$$V_b = 0,005 \quad \text{- lemezszélesség} \quad (26)$$

## 5.5. $\gamma_{MI}$ meghatározási módszerek a nemzetközi szakirodalom alapján

### 'A' módszer

Az 'A' módszer (Kövesdi B., Somodi B. [24] elnevezését használva) alapján a névleges és a tervezési ellenállás értékeinek arányából határozható meg a szükséges parciális biztonsági tényező ( $\gamma_{M^*}$ ).

$$\gamma_{M^*} = \frac{r_{nom}}{r_d} \quad (27)$$

A képletben szereplő  $r_d$  a (22) egyenlettel számítható,  $r_{nom}$  pedig az alap paraméterek nominális értékeinek függvényében, használva az ellenállás függvényt a (28) egyenlet szerint.

$$r_{nom} = g_{rt}(X_{nom}) \quad (28)$$

A stabilitásvizsgálatokhoz tartozó biztonsági tényező értéke épületek esetén 1,0, hidak esetén pedig 1,1 Magyarországon az EN 1993-1-1 szerint, és a szabványban a  $\gamma_{MI}$  értékek a  $\gamma_{M^*}$ -ból vannak származtatva. Amennyiben a kísérleti eredmények statisztikai kiértékelése során kiszámított  $\gamma_{M^*}$  kisebb, mint 1,0, akkor a megvizsgált ellenállás modell megfelel az EN1990 biztonsági kritériumának. Ha a statisztikai kiértékelés alapján  $1,0 < \gamma_{M^*} < 1,1$ , akkor csak hidak esetén éri el a biztonsági szintet, épületek esetén nem. Hogyha pedig a kiszámított  $\gamma_{M^*}$  nagyobb 1,1-nél, akkor a szükséges biztonsági szintet nem éri el a vizsgált ellenállás modell. Tehát a magasabb  $\gamma_{M^*}$  értékek alacsonyabb biztonsági szintet, az alacsonyabb  $\gamma_{M^*}$  értékek pedig magasabb biztonsági szintet jelentenek a vizsgált ellenállás modellek esetén.

## 'B' módszer

A 'B' módszert (Kövesdi B., Somodi B. [24] elnevezése) alkalmazom a determinisztikus vizsgálat statisztikai kiértékelése során. Ez a módszer szintén a  $\gamma_{M^*}$  biztonsági tényezőn alapszik, ezért az 'A' módszernél leírt megállapítások most is igazak, a két módszer közötti eltérés a  $\gamma_{M^*}$  meghatározásában rejlik. A tervezés során alkalmazható  $\gamma_{M^*}$  szükséges parciális biztonsági tényező az elméleti parciális biztonsági tényező  $\gamma_M$  és a módosító tényező szorzataként számítható ( $\Delta k$ ) a (29) egyenlettel. A módosító tényező azt veszi figyelembe, hogy az 5%-os alsó kvantilis helyett a legtöbb esetben a paramétereket a névleges értékükkel használtuk fel a karakterisztikus értékek meghatározásához.

$$\gamma_{M^*} = \Delta k \cdot \gamma_M \quad (29)$$

ahol:

$$\gamma_M = \frac{r_k}{r_d} = \exp(1,4 \cdot Q) \quad (30)$$

$$\Delta k = \frac{\exp(-2Q_{fy} - 0,5Q_{fy}^2)}{b \cdot \exp(-k_\infty Q - 0,5Q^2)} = \frac{0,867}{b \cdot \exp(-1,64 \cdot Q - 0,5 \cdot Q^2)} \quad (31)$$

$Q$  a (23) egyenlet alapján számítható és  $Q_{fy}=0,07$  a JCSS szerint. [26]

## 'C' módszer

A harmadik, és egyben utolsó módszert, amit a jelen dolgozatban ismertetek Kövesdi B. és Somodi B. publikációjában [24] 'C' módszer néven szerepel. E módszer esetén az alsó 2,3%-os kvantilis meghatározására van szükség, és ehhez egy  $k_{2.3\%}$  biztonsági tényezőt kell kiszámítani a (32) egyenlettel.

$$k_{2.3\%} = b \cdot (1 - k_n \cdot V_\delta) \quad (32)$$

Ahol  $k_n=2,0$ ,  $b$  és  $V_\delta$  értékei a (15) és (17) egyenletekben határozhatóak meg. Amennyiben a  $k_{2.3\%} \geq 1,0$  kritérium teljesül, akkor a szükséges biztonsági szintet elértük, az adott kihajlási, vagy kifordulási göbe használható a tervezésben. A magasabb  $k_{2.3\%}$  értékek magasabb biztonsági szintet jelentenek, a kisebb  $k_{2.3\%}$  pedig kisebb biztonságot jelent.

## 6. A laboratóriumi kísérlethez tartozó numerikus modell

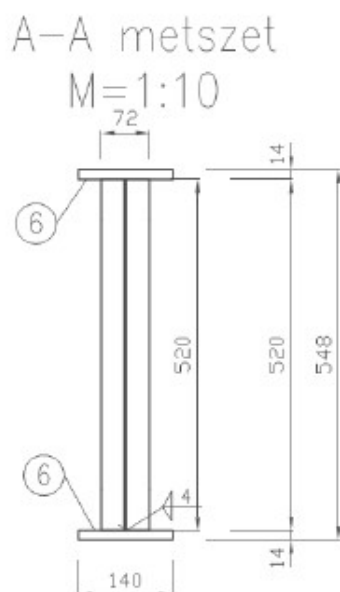
Az elméleti és történeti áttekintés után a következő fejezetben a trapézlemez-gerincű tartók kifordulási görbéjének meghatározására fókuszálok. A kérdés tárgyalására a trapézlemez-gerincű tartó kifordulásvizsgálatára numerikus modell készült, azonban a modell sok bizonytalanságot tartalmazott. Első lépésben ezért a korábbiakban ismertetett Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen 2019-ben végzett kísérletsorozathoz nyúltam vissza, és olyan numerikus modellt akartam készíteni, amelyet ezek alapján a mérések alapján validálhatok. Ezután a modell módosításával tudok majd áttérni a tiszta kifordulási alapesetre, a csuklós-csuklós kéttámaszú tartó vizsgálatára, ami a kifordulási görbefejlesztés alapja.



22. ábra: 1/1 próbatest kifordulás vizsgálata (BME – 2019).

### 6.1. A vizsgált gerenda geometriai kialakítása és a kísérleti eredmény

A kísérleti program tizenkét próbatestéből, melyek közül az egyiket választottam ki a jelen feladatban a modellem validálására, ezt fogom a következőkben bemutatni. A kísérletsorozatban a próbatestek csupán övlemez méretükben tértek el egymástól, ezen kívül a keresztmetszet kialakítása, a trapézlemezprofilja megegyezett. Mivel néhány esetben a tönkremenetelben megjelent az övlemez horpadása is, olyan próbatestet választottam, amelyiknél a tönkremenetel módja végül tiszta kifordulás volt, hiszen a jelenlegi vizsgálatnak ez van a fókuszában. Ezt a próbatestet mutatja a 22. ábra, a vizsgált gerenda keresztmetszetét és jellemző geometriai méreteit pedig a 23. ábra foglalja össze.



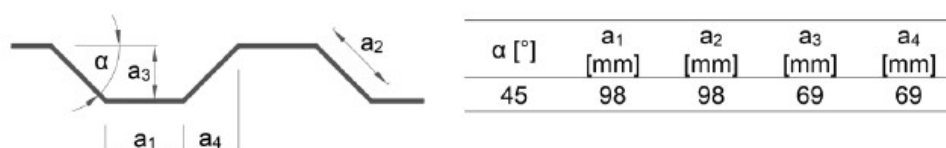
**23. ábra:** A vizsgált gerenda tervezett keresztmetszete.

Megjegyzendő, hogy a 23. ábra a tervezett keresztmetszeti kialakítást mutatja, ettől a valóság kicsit eltért, az elkészült gerendának jellemzőit lemérték, így a modell során már ezen adatok segítségével pontosabban tudtam dolgozni. A kísérlet után a deformációt nem szenvedett acél egyes részeiből lemezdarabokat vágtak ki és ezeken anyagvizsgálati kísérleteket hajtottak végre, így határozták meg a tényleges fizikai paramétereit az anyagnak, később a numerikus modellben ezekkel az értékekkel is fel lehetett használni. (5. táblázat)

Próbatest	$t_f$ (mm)	$b_f$ (mm)	$t_w$ (mm)	$h$ (mm)	$h_w$ (mm)	$t_s$ (mm)	$f_{yf}$ (MPa)	$f_{uf}$ (MPa)	$f_{yw}$ (MPa)	$f_{uw}$ (MPa)
1/1	13.8	139	6	547.0	519.3	10	357	528	289	379

**5. táblázat:** Mért geometriai és acél fizikai paraméterek

Az alkalmazott trapézlemezprofil kialakítása olyan volt, hogy a ferde és a párhuzamos gerincmezők hosszai megegyeztek ( $a_1=a_2=98$  mm); az alkalmazott hajlítási szög pedig  $45^\circ$  volt, melyet a 24. ábra mutat be.



**24. ábra:** Trapézlemezprofil kialakítása.

A tervezett gerenda pontos hossza 8,2 m volt, amelyet kéttámaszú konzolos elrendezésben terheltek meg: a középső, kifordulásra érzékeny szakasz hat méteres volt, és a szimmetriának



megfelelően a két konzol 1100 mm-s volt. A terhelés 100 mm-re a gerenda végeitől működött, tehát az erőkar nagysága 1 m-es volt a belső szakasz terheléséhez. Ez a középső tisztán hajlított szakasz volt a vizsgálat tárgya.

A kísérlet eredményét a 6. táblázat foglalja össze, ahol  $M_y$  (kNm) a korlátatlan folyás határállapotához tartozó kézzel számított nyomatéki ellenállást jelenti, az  $M_{test}$  (kNm) pedig az adott kísérlet során kapott valódi határnyomatékot jelzi.

Próbatest	$c_f/t_f$	öblemez osztály	$M_{test}$ (kNm)	$M_y$ (kNm)	$M_{test}/M_y$	tönkrementel <sup>1</sup>
1/1	7.5	2	297.4	366.2	0.81	LTB

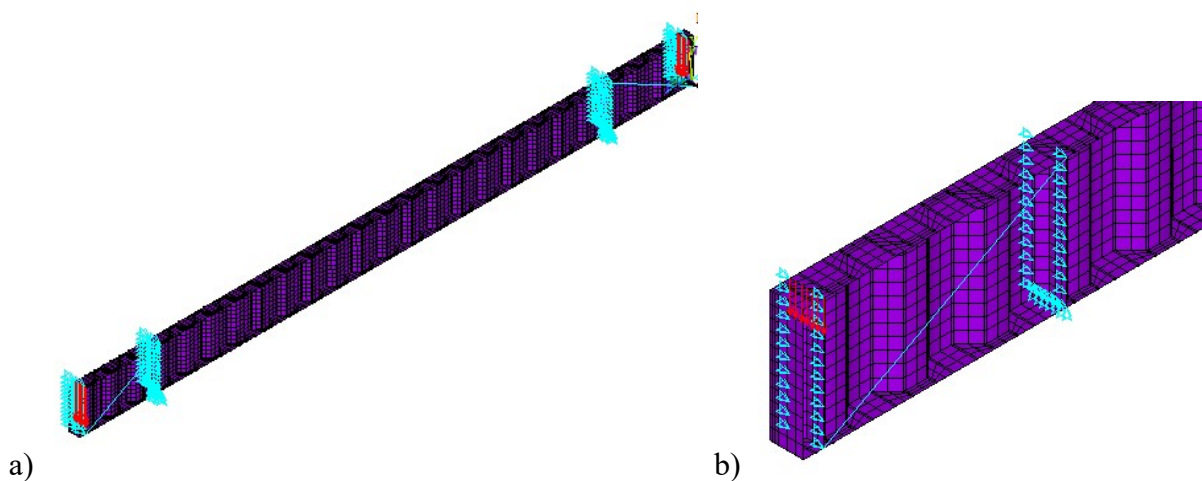
**6. táblázat:** A teherbírás és a tönkrementel módja.

Ezek alapján lehetett elkészíteni a fejlett numerikus modellt az ANSYS szoftver segítségével.

## 6.2. Kidolgozott numerikus modell és specialitásai

### 6.2.1. Geometriai modell és peremfeltételek

A numerikus modell majdnem teljes egészében héj modell volt, mindössze egy-egy merevítő rúd került rúdként a modellbe a konzolos részekben. Az ANSYS szoftver Shell 181 négyponos héjelemeiből építettem fel a modellt.

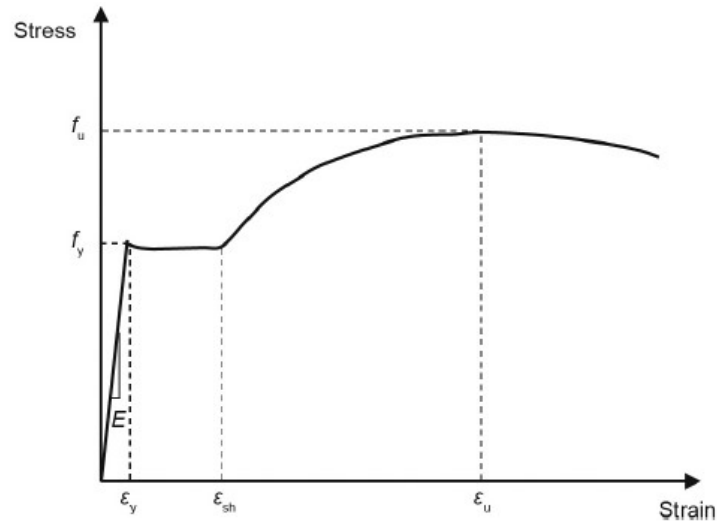


**25. ábra:** Kidolgozott numerikus modell, támaszkialakítás és az erőbevezetés modellje.

A modellben a peremfeltételek a lehető legréálisabban igyekeznek igazodni a valós fizikai kísérlethez, így a támaszoknál függőleges és oldalirányú megtámasztás, az erőbevezetési helyeknél pedig oldalirányú megtámasztás van. Az erő függőlegesen hat a gerenda felső övére, vonalmenti teherként a keresztmetszet szélességében. A teljes modellt a 25.a ábra mutatja, a 25.b ábrán pedig a támaszkialakítás és a teherelrendezés közelebbről látszik.

### 6.2.2. Alkalmazott anyagmodell

A nemlineáris számításhoz a numerikus modellben multilineáris anyagmodellt alkalmaztam a szakirodalomban található legfrissebb javaslat alapján. Az acél tipikus feszültség-nyúlás görbéje a 26. ábrán látható. A rugalmas tartományban a meredekség lineáris, és a rugalmassági modulus (E) határozza meg, amelyet az EN 1993-1-1 szabvány alapján  $210\,000\text{ N/mm}^2$ -nek vettem fel. Az  $f_y$  folyáshatár elérését követően, vagyis a megfelelő  $\varepsilon_y = f_y/E$  folyási nyúlás elérése után, a nyúlás tovább növekszik egy folyási plató mentén anélkül, hogy a feszültség növekedést mutatna. Ezt követően az  $\varepsilon_{sh}$  nyúlás után, megindul a felkeményedés, a feszültség a nyúlás növekedése mellett újra növekedni kezd. Végül a feszültség eléri a maximális értékét, az  $f_u$  szakítószilárdságot, a hozzá tartozó  $\varepsilon_u$  alakváltozás mellett, ami után a feszültség csökken nyúlás mellett, amíg elérjük a szakadó nyúlást, azaz végül bekövetkezik a törés.



26. ábra: Tipikus feszültség-nyúlás görbe szerkezeti acélokhoz. [29]

A 27. ábrán látható Gardner és társainak ajánlása [29], amelyhez a (33)-(38) egyenletekkel kaphatók meg a szükséges paraméterek. Ezen multilineáris anyagmodellt három alapvető paraméterből – rugalmassági modulus (E), folyáshatár ( $f_y$ ), és szakítószilárdság ( $f_u$ ) – meg lehet határozni.

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ f_y, & \varepsilon_y < \varepsilon \leq \varepsilon_{sh} \\ f_y + E_{sh} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{sh}), & \varepsilon_{sh} < \varepsilon \leq C_1 \cdot \varepsilon_u \\ f_{C_1 \varepsilon_u} + \frac{f_u - f_{C_1 \varepsilon_u}}{\varepsilon_u - C_1 \cdot \varepsilon_u} \cdot (\varepsilon - C_1 \cdot \varepsilon_u), & C_1 \cdot \varepsilon_u < \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (33)$$

$$E_{sh} = \frac{f_u - f_y}{C_1 \cdot \varepsilon_u - \varepsilon_{sh}} \quad (34)$$

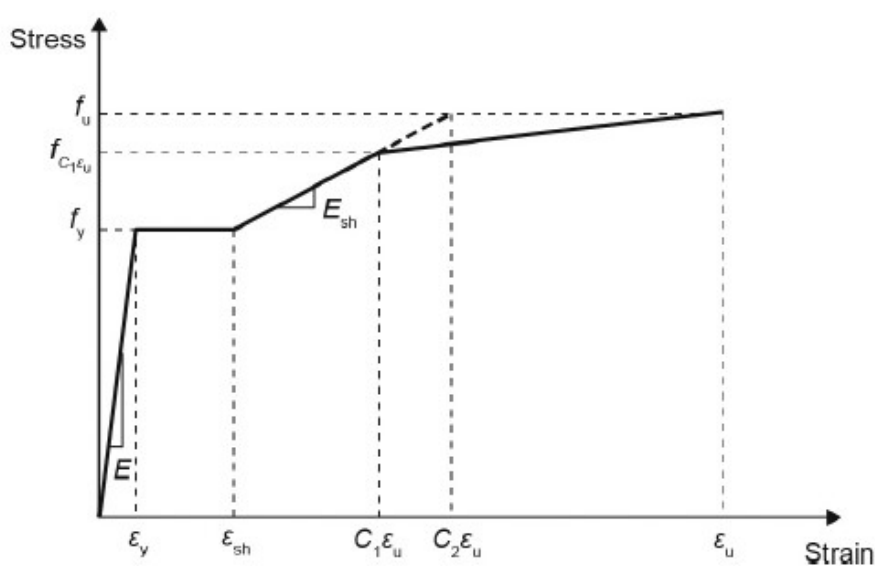
$$C_1 = \frac{\varepsilon_{sh} + 0,25 \cdot (\varepsilon_u - \varepsilon_{sh})}{\varepsilon_u} \quad (35)$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_{sh} + 0,4 \cdot (\varepsilon_u - \varepsilon_{sh})}{\varepsilon_u} \quad (36)$$

$$\varepsilon_{sh} = 0,1 \cdot \frac{f_y}{f_u} - 0,055, \text{ de } 0,015 \leq \varepsilon_{sh} \leq 0,03 \quad (37)$$

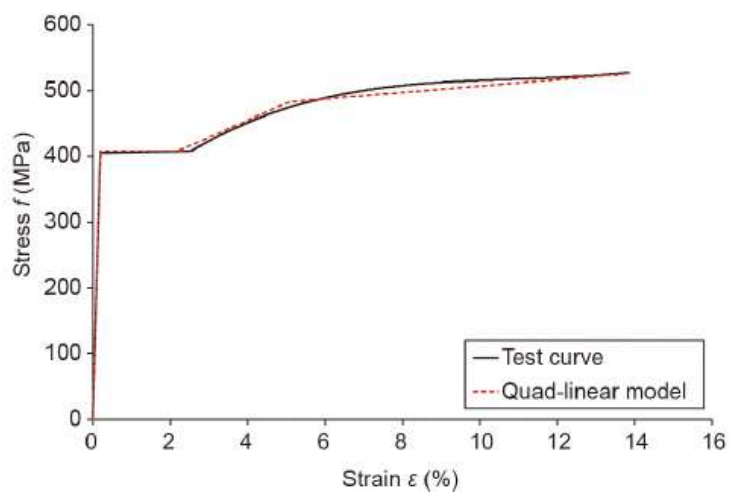
$$\varepsilon_u = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_y}{f_u}\right), \text{ de } \varepsilon_u \geq 0,06 \quad (38)$$

Ez az anyagmodell az EN 1993-1-1 tervezési előírásaihoz képest jobb pontosságot mutat.



**27. ábra:** Multilineáris anyagmodell Gardner [29] alapján.

Az anyagmodell helyességét kísérletekkel igazolták, különböző anyagminőségekre végeztek vizsgálatokat, az egyik eredményeit mutatja a 28. ábra.



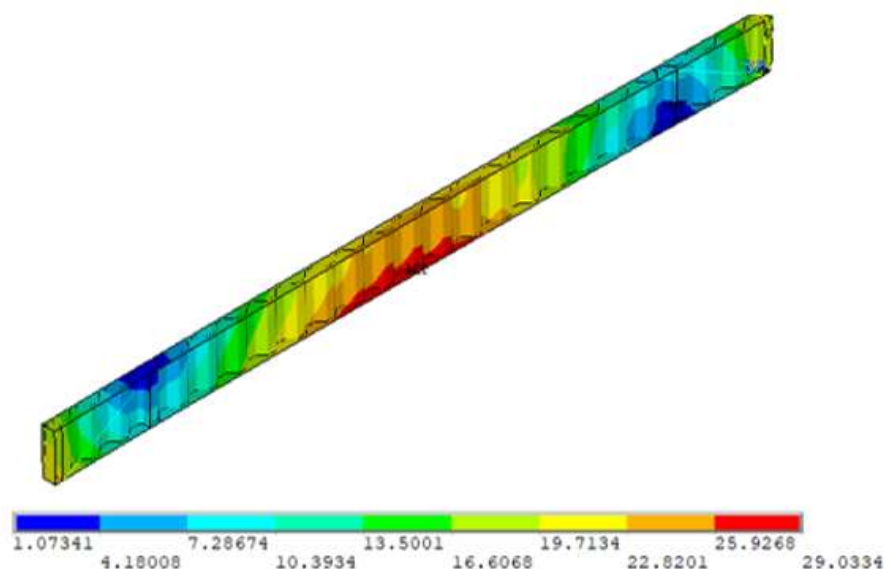
**28. ábra:** A multilineáris anyagmodell összehasonlítása a Chan és Gardner által tesztelt S355 minőségű acél kísérleti feszültség-nyúlás görbéjével [30].

### 6.2.3. Alkalmazott imperfekciók

A kísérlet során alkalmazott próbatest imperfekt, a gerenda nem teljesen egyenes, a szerkezetben vannak sajátfeszültségek. Ezt feltétlenül szem előtt kell tartani a numerikus modell készítése során is, és ennek több módja lehet. A jelen modellben ezeket a tökéletlenségeket egyszerre kezeltük: helyettesítő geometriai imperfekció segítségével. Ebben tehát ugyanúgy figyelembe van véve a sajátfeszültségek hatása, mint a geometriai imperfekciók. A helyettesítő geometriai imperfekciónál a tökéletes geometriát módosítjuk, a kezdeti görbeség alakja megegyezik az első sajátalakokkal, ami a vizsgált stabilitási jelenség szempontjából lehető legkedvezőtlenebb geometriai imperfekciót jelenti. A valóságban természetesen nem ilyen alakú a kezdeti alakja a szerkezetnek, de a helyettesítő geometriai imperfekció egyben reprezentálja a geometriai tökéletlenségeket, valamint a gyártás miatti sajátfeszültségek hatást is.

### 6.2.4. Alkalmazott analízis típusa

A numerikus modell validálása során kétféle analízist végeztünk el először a sajátalak meghatározása volt a cél, ezért LBA analízis hajtottunk végre, majd ennek eredményét felhasználva a szerkezetre rátettük az imperfekciót is és a nemlineáris vizsgálat már ennek, illetve az anyagi nemlinearitás figyelembevételével történik (GMNIA analízis), aminek eredményeként kapott tönkremeneteli ábrát egy jellemző esetre a 29. ábrán mutatom be. A kísérlet során az alsó öv a nyomott és a felső a húzott, így a kifordulási tönkremenetel az alsó öv oldalirányú elmozdulásával következik be.



**29. ábra:** Kifordulási tönkremenetel – síkra merőleges elmozdulási ábra, [mm].

A numerikus modellben a terhelés lehet erő vezérelt, vagy elmozdulás vezérelt is lehet. Az erő-elmozdulás diagramban a teherbírás elérése utáni leszálló ágat csak az elmozdulás vezérelt módszerrel lehet szépen megkapni, hiszen a másik esetben az erővezérelt modell a teherbírás maximumpont elérése után nem konvergál. A diplomamunkámban a vizsgálat célja a kifordulási ellenállás meghatározása volt, így erővezérelt modellt alkalmaztam.

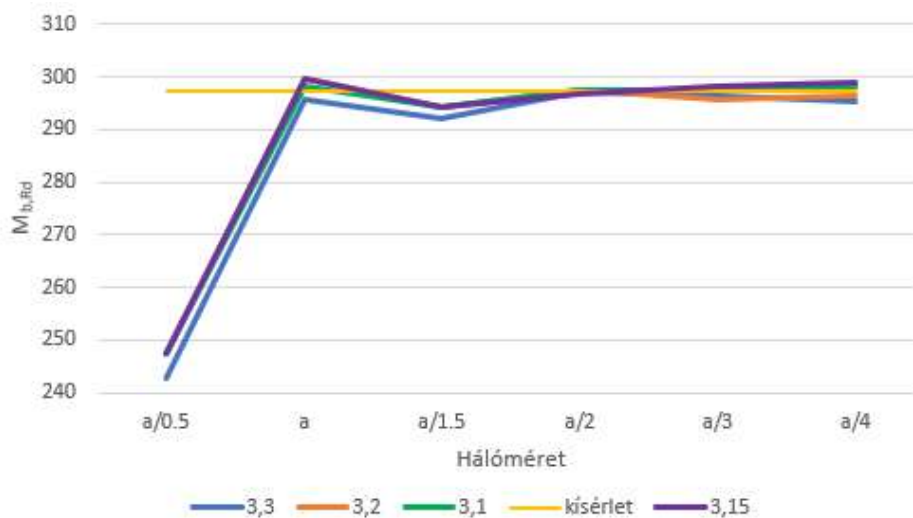
### 6.3. Numerikus modell verifikálása és validálása

A modell validálása és verifikálása nagyon fontos lépése a modellezési folyamatnak, mert ebből kiderül a kapott eredmények alkalmazhatósága és pontossága. Kiemelt figyelmet fordítottam a modell verifikációjára, a hálóérzékenység vizsgálatára, hiszen nem megfelelő háló alkalmazásával pontatlan eredményt kaphatunk, de ugyanígy a túl sűrű háló sem előnyös, hiszen nagyban megnöveli a futtatás időtartamát. Ezért azt a hálósűrűséget kell megkeresni, amely után az eredmény már beállt, azaz a háló méretének csökkentése már nem változtat szignifikánsan a kapott eredményeken.

A modellben a hálót a gerinc trapézkialakításának „a” méreteinek függvényében adom meg ( $a_1=a_2=98$  mm). Azt vizsgáltam, hogy hat különböző hálóméret és négy különböző imperfekció közül melyik adja a legpontosabb (a kísérlet eredményével legjobban egyező) kifordulási ellenállást. Az imperfekció reális méretét először az  $a/2$  hálómérettel kerestem meg, ezt használva még jóval rövidebb volt a futtatási idő, mint  $a/4$  méretű háló esetén. A futtatások során azt tapasztaltam, hogy „a” méretű háló után, már nincs jelentős változás az egyes imperfekciókhoz tartozó eredményekben. Az  $a/2$ - $a/4$  szakaszon már ez a kisebb hullámzás sem jelenik meg, ezért az „ $a/2$ ” hálóméret tűnt az optimális választásnak. Ezt 3,2 mm imperfekció esetén alkalmazva a kísérlet eredményét gyakorlatilag visszakaptam. A pontos eredményeket a 7. táblázat mutatja be, majd ezeket diagrammon is ábrázoltam (30. ábra), amelyen a kísérlet eredményét is feltüntettem egy sárga vonallal. Jól látszik, ahogy a háló sűrítésével ehhez simulnak a görbék. Az imperfekciók mm-ben értendők.

Mb,Rd [kNm]								
		háló méret a gerinc a1 méretéhez viszonyítva						Kísérlet
		a/0.5	a	a/1.5	a/2	a/3	a/4	
imperfekció [mm]	3,3	242,781	295,844	292,25	297,145	296,538	295,312	297,4
	3,2	247,375	299,812	294,312	297,375	295,844	296,537	
	3,15	247,375	299,519	294,25	296,844	298,375	298,753	
	3,1	247,375	298,375	294,25	297,375	297,375	298,375	

7. Táblázat: A hálóérzékenységvizsgálat eredményei.



**30. ábra:** Kifordulási ellenállás a VEM hálóméret függvényében.

Megvizsgáltam azt is, hogy az utolsó három hálóméret ( $a/2 - a/4$ ) átlagát véve – hiszen ezeknél már beállt az eredmény – mekkora az eltérés a különböző imperfekciók esetén a kísérletben kapott kifordulási ellenálláshoz képest. A vizsgált imperfekciókra mind azt lehet mondani, hogy jól közelítik az eredményt, ezért a 3,2 mm imperfekció jó választásnak tűnt, amivel a legközelebbi értéket kaptuk  $a/2$  hálósűrűség esetén, melyet a 8. táblázat mutat be (Megjegyzés: 3,15-ös imperfekciót azért vizsgáltam meg, mert úgy tűnt 3,2 és 3,1 között kellene lennie a legkisebb hibának. Meglepetésemre 3,15 mm imperfekciónál nagyobb hibát kaptam, de ez is csak azt mutatja, hogy ebben a tartományban nagyon közel vagyunk a kívánt eredményhez és a hiba kicsi.)

átlag	$a/2 - a/4$	Eltérés
3,3	296,3316667	1,068333
3,2	296,5853333	0,814667
3,15	297,9906667	-0,59067
3,1	297,7083333	-0,30833

**8. Táblázat:** Eltérések a mért és számított értékek között.

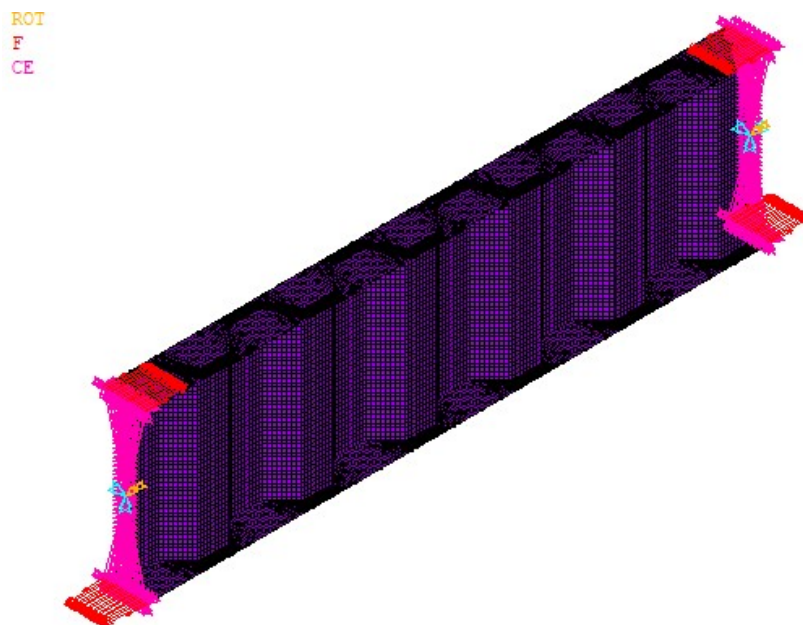
A modell validálása során egyrészt azt igazoltam, hogy a numerikus modell követi a stabilitási jelenséget, a virtuális modellben ugyanaz lett a tönkremeneteli mód, mint a fizikai kísérlet során (kifordulás). Másrészt azt bizonyítottam, hogy a numerikus kellő pontosan képes meghatározni a kifordulási ellenállást.

## 7. A vizsgálatokhoz alkalmazott numerikus modell bemutatása

A szakirodalmi áttekintés és a modell validálása után a következő lépés a modell módosítása volt, amivel a kiforduláshoz tartozó alapesetet, a csuklós-csuklós kéttámaszú, két végén végnyomatékkal terhelt tartót vizsgálni tudom. Ebben a fejezetben ennek a modellnek a részleteit és eredményeit mutatom be.

### 7. 1. Geometriai modell és peremfeltételek

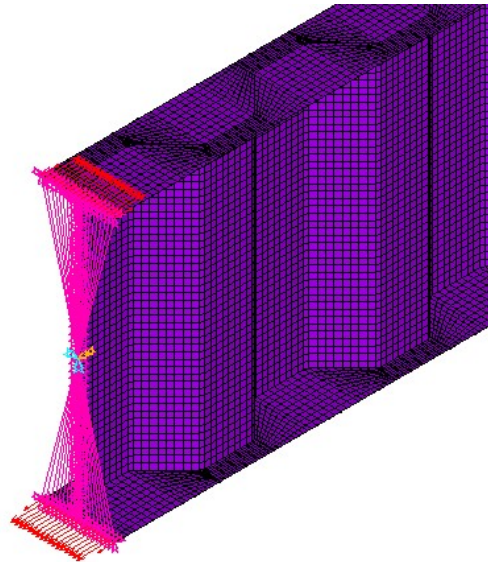
A numerikus modell kifejlesztése a korábbihoz hasonlóan egy általános végeselemes programban történt (ANSYS 19.2) és ebben egy teljes héj modell készítettem, melyet a 31. ábra mutat be.



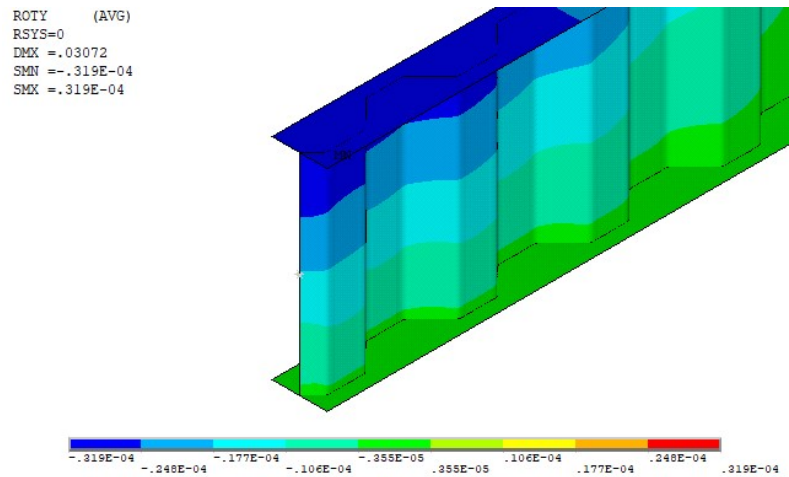
**31. ábra:** A teljes modell a csuklós támasszal és a két végi nyomatékkal.

Ebben a modellben csuklós megtámasztást alkalmaztam. A gerenda két vége azonos módon került megtámasztásra, kivéve a hosszirányú megfogást, melyet csak az egyik oldalon alkalmaztam. A megtámasztási modellben a végkeresztmetszet súlypontjában levő node van megtámasztva függőlegesen és keresztirányban, illetve a hossz tengely körüli elfordulás meg van akadályozva. Ezen kívül a két végkeresztmetszetben a hosszirányú elfordulási szabadságfokok, a függőleges és keresztirányú eltolódási szabadságfokok össze vannak kötve (villás megtámasztás modellezéséhez). A következő ábrák a támaszt mutatják közelről (32.a ábra), illetve azt szemléltetik, hogy az elfordulás egyenletes és az öblösödés létrejöhet, tehát a támaszkialakítás megfelelő a kifordulási jelenség vizsgálatára (32.b ábra).

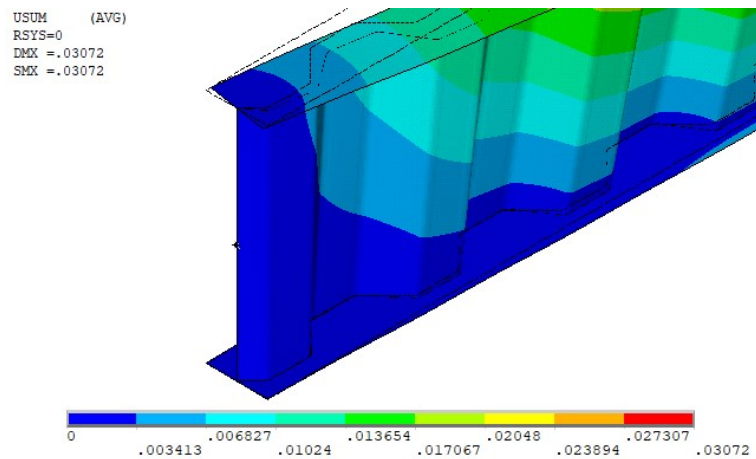
(a)



(b)



(c)



**32. ábra:** A csuklós támasz (a) és a tartóvég függőleges tengely körüli elfordulása és oldalirányú eltolódás kontúrja (b), (c)

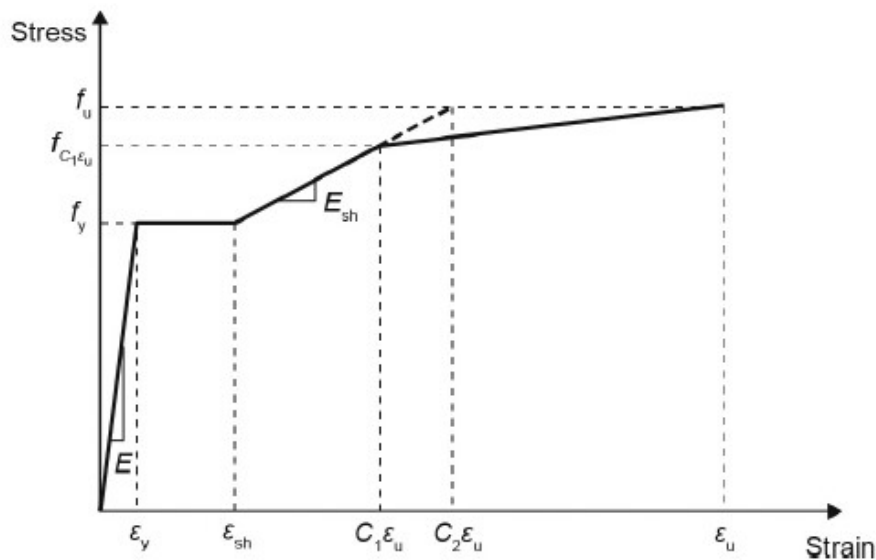
Az erő minden esetben koncentrált nyomaték, a gerenda mindkét végén konstans értékkel. Mivel a kifordulás vizsgálata volt a cél és az egyéb tönkremenetelleket kerülni próbáltam, a



terhet nem koncentráltan alkalmaztam a modellen, hanem megoszló erőként az öv teljes szélességében.

## 7.2. Az alkalmazott anyagmodell

A nemlineáris számításhoz a modellben multilineáris anyagmodellt alkalmaztam (33. ábra), mely megegyezik az 6.2.2. fejezetben bemutatott anyagmodellel azzal a különbséggel, hogy a folyáshatár és szakítószilárdság értékeként nem a kísérletben mért, hanem a karakterisztikus értékeket alkalmaztam. A szükséges paramétereket a korábban ismertetett (33)-(38) egyenletekkel lehet megkapni.



33. ábra: Multilineáris anyagmodell Gardner [29] alapján.

## 7.3. Az alkalmazott imperfekciók

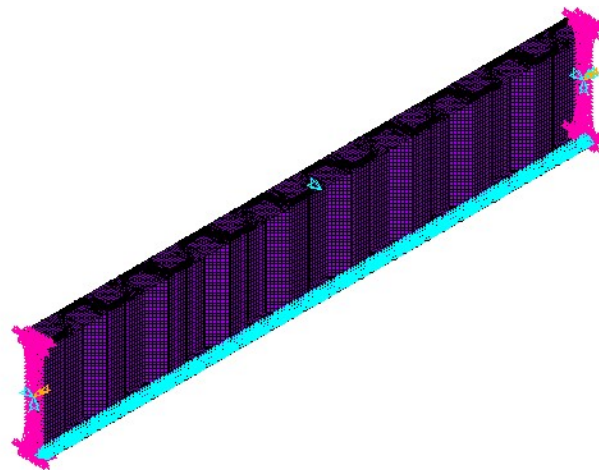
Trapézlemez-gerincű tartók esetére a szabványok jelenleg nem adnak a síklemez-gerincű I-tartókhoz hasonló, méretezési helyettesítő geometriai imperfekciókat, így ez a kérdés alaposabb megfontolást igényelt részemről. Becslésként jó ötletnek tűnt visszanyúlni a korábbi laboratóriumi kísérletekhez, ami alapján  $L/750$  ekvivalens geometriai imperfekciót kellett volna használni (biztonságosan) a numerikus számítások során, de a tizenkét próbatesthez tartozó számítások e tekintetben jelentős különbségeket mutattak és nyilvánvalóan nem lett volna kellően megalapozott ennek az értéknek a felvétele egyetlen kísérleti program alapján.

Ezért annak a meghatározására, hogy mekkora ekvivalens geometriai imperfekció felel meg a szabvány által javasolt  $L/1000$ -es geometriai imperfekció (MSZ EN 1090-2:2018 Annex B gyártási tolerancia:  $L/1000$ ) és a sajátfeszültségek kombinációjának, ennek meghatározására  $L/200$ -tól  $L/600$ -ig végeztem futtatásokat ekvivalens geometriai imperfekciókkal minden karcsúságnál és minden vizsgált keresztmetszetnél.

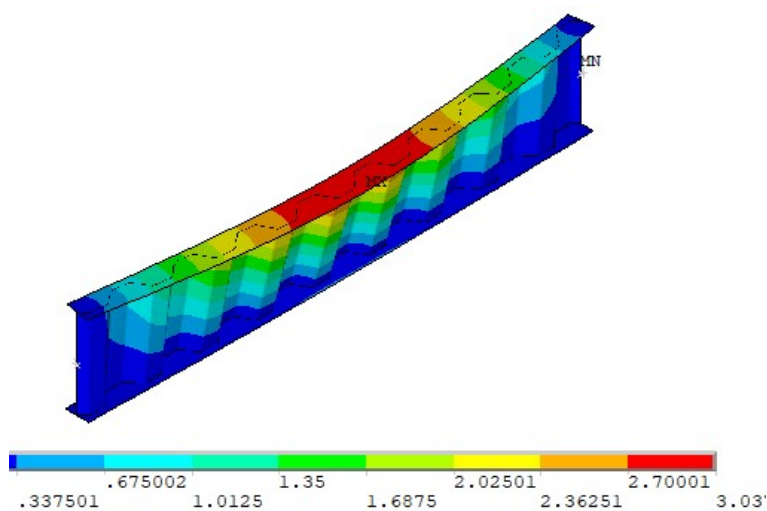
A vizsgálat eredményeit a 8.2. fejezetben mutatom be. A determinisztikus vizsgálatához pedig olyan modellt alkalmaztam, amely a sajátfeszültségeket és a geometriai hibákat külön veszi figyelembe, nem egy helyettesítő geometriai imperfekcióval.

### 7.3.1. A geometriai imperfekció alakja a numerikus modellben

A nemlineáris vizsgálat során a kifordulási tönkremenetelhez tartozó sajátalak formájú imperfekciót alkalmaztam, melyet LA analízissel határoztam meg úgy, hogy a gerenda alsó övét megtámasztottam vízszintes elmozdulás ellen, a felső övének közepén pedig egy kellő nagyságú síkra merőleges elmozdulásterhet működtettem. A megtámasztási rendszert és az imperfekció alakját egy esetre vonatkozóan a 34-35. ábrák mutatják be. Ezzel az imperfekciós alakkal írtam felül a szerkezet kezdeti geometriáját.



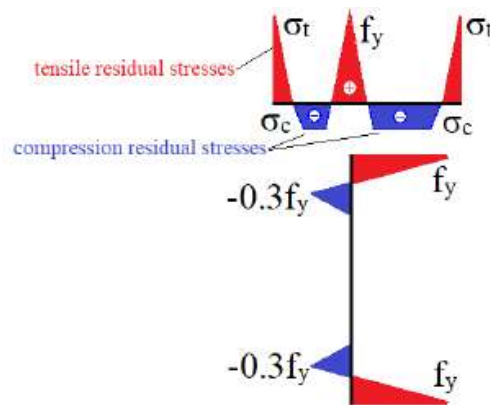
**34. ábra:** Imperfekcióhoz szükséges megtámasztások a modellben.



**35. ábra:** Alkalmazott imperfekciós alak a modellben.

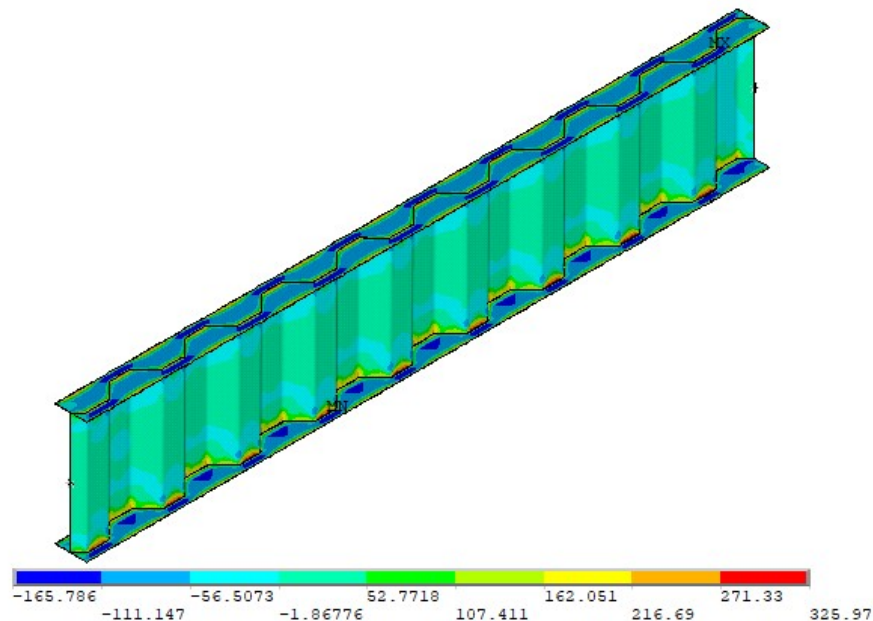
### 7.3.2. Az alkalmazott sajátfeszültség-modell bemutatása

Az alkalmazott sajátfeszültség-modell elméleti ábráját a 36. ábra mutatja. Az övekben a húzófeszültség a gerinc és az öv találkozásánál a folyáshatárral megegyezik ( $f_y$ ), az öv szélein pedig szintén húzás alakul ki (lángvágással készülő gerendák esetén ez tipikus), közöttük nyomófeszültség van az övlemezekben. A gerincben lévő sajátfeszültség hatása jóval kisebb, lényegében elhanyagolható is lehetne a trapézlemezre jellemző ún. harmonikahatás (a gerinc nem dolgozik a normál irányú igénybevételekkel szemben) következtében. A gerincen a gerinc és az öv csatlakozásánál húzófeszültség alakul ki, majd egy kis szakaszon nyomófeszültség van, illetve a gerinc jelentős része sajátfeszültségektől mentes, szintén a harmonikahatás miatt.



36. ábra: Alkalmazott sajátfeszültség-modell [17].

A 37. ábra az egyik próbatest sajátfeszültség-modelljét mutatja az első teherlépcső végén.



37. ábra: Modellezett sajátfeszültségek eloszlása a gerenda hossza és keresztmetszete mentén.

#### 7.4. Hálóérzékenység vizsgálat

A megfelelő végeleemes háló alkalmazása érdekében ennél a modellnél is a trapéz oldalhosszát ( $a_1$ ) osztottam darabokra, nem kerek számokkal, hanem  $a_1/3$ -tól  $a_1/8$ -ig vizsgáltam az eredményeket, melyeket a 9. táblázat mutatja be.

Hálóérzékenység vizsgálat				
Háló	[mm]	Teher	alfa	M <sub>R</sub>
a <sub>1</sub> /3	32,67	400	0,945375	378,150
a <sub>1</sub> /4	24,50		0,898813	359,525
a <sub>1</sub> /5	19,60		0,8695	347,800
a <sub>1</sub> /6	16,33		0,856563	342,625
a <sub>1</sub> /7	14,00		0,8635	345,400
a <sub>1</sub> /8	12,25		0,87625	350,500
Az utolsó 4 érték esetén a maximum és minimum közötti eltérés:				2%

9. táblázat: Eredmények táblázatos formában.

A teher és a teherbírás ( $M_R$ ) értéke kNm-ben értendő. Az eredményeket diagramon is ábrázoltam a 38. ábrán.



38. ábra: Hálóérzékenység vizsgálat eredménye.

Az eredményekből az látható, hogy  $a_1/5$ -nél sűrűbb háló megfelelően alkalmazható, az eredmény ezen a hálósűrűség tartományon már beáll. Így a legtöbb számításhoz  $a_1/5$ -es hálósűrűséget alkalmaztam. Kivételt képez az a modell, amelyikben geometriai imperfekcióval és sajátfeszültséggel dolgoztam. Ebben az esetben kiemelkedően fontos volt a sűrű háló, ezért ott minden esetben  $a_1/8$ -as hálómérettel dolgoztam.

Kétféle analízist végeztem ezen a modellen is: először a sajátalak meghatározása volt a cél (LBA analízissel), majd a nemlineáris vizsgálat már az imperfekciók figyelembevételével történt a teherbírás meghatározására (GMNIA analízissel).

## **8. Vizsgálatok a numerikus modell alapú méretezési eljáráshoz**

### **8.1. Méretezési eljárások stabilitásvizsgálathoz**

A kifordulási ellenállás meghatározására két megközelítés alakult ki: kísérlet alapú szemipirikus eljárások, illetve numerikus modell alapú méretezési eljárások. Az elmúlt évtizedekben alapvetően az előbbi megközelítés alkalmazására volt lehetőség, ebben az esetben az imperfekciók kedvezőtlen hatását nem közvetlenül lehet figyelembe venni, hanem a kifordulási csökkentő tényezők használatával. A kifordulási csökkentő tényezőt kifordulási görbék alapján lehet meghatározni a viszonyított karcsúság alapján. A kifordulási görbék kifejtése lényegében empirikus alapon történt, bár volt mögötte elméleti háttér is. Gyakorlatilag nagyszámú kísérlet eredményeinek statisztikai kiértékelésén alapulnak ezek a görbék. Régebben a kísérletek természetesen kizárólag laboratóriumi kísérletek lehettek, azonban napjainkban ez már kiváltható numerikus szimulációval.

A másik megközelítés esetén a numerikus modellben közvetlenül vesszük figyelembe az imperfekciókat, és geometriailag és anyagilag nemlineáris analízis eredményeképpen kapjuk a kifordulási ellenállást. Magától értetődő, hogy ez a módszer már komoly számítástechnikai háttérrel igényel, ezért korábban ez az eljárás szóba sem jöhetett. Mivel az imperfekciók sokfélék és jelentős szórást mutatnak, a gyakorlati életben helyettesítő imperfekciókra van szükség.

A diplomamunkámban mindkét megközelítéssel foglalkoztam, először a numerikus modell alapú méretezési eljárás kapcsán a szükséges ekvivalens geometriai imperfekciók meghatározását mutatom be.

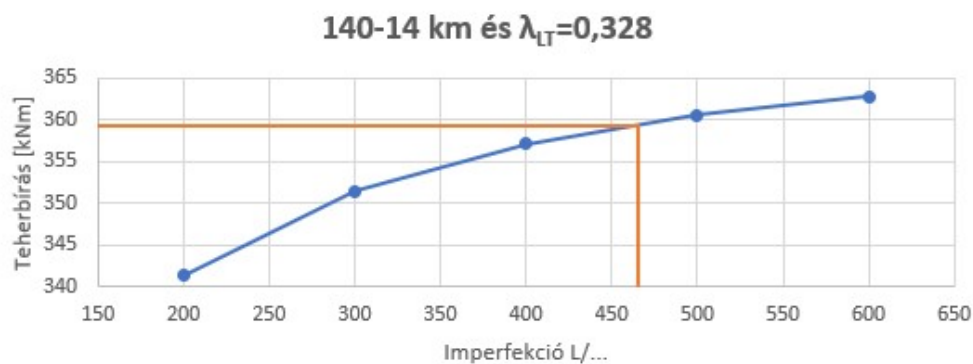
### **8.2. Imperfekció-érzékenységi futtatások eredményei**

Ötféle keresztmetszetet vizsgáltam imperfekció-érzékenység szempontjából, ezek csupán az övméreteikben tértek el egymástól. A tartók gerincmagassága minden esetben 520 mm volt, és a gerinc szélessége 6 mm. A keresztmetszetek kétszeresen szimmetrikusak voltak; az ötféle övlemez mérete a következő: 140-14, 160-14, 180-14, 220-16, 250-16 (öv szélesség – övvastagság mm-ben).

A 140-14-es övű gerendák esetében háromféle trapézprofilal dolgoztam, az eltérés csak az iránytörési szögében volt: a hagyományos 45°-on kívül 30°-ot és 40°-ot alkalmaztam. A különböző típusú tartóknál 6-8 különböző karcsúságot vizsgáltam és sorra megkerestem azt az ekvivalens geometriai imperfekciót, amellyel ugyanakkora nyomatéknál megy tönkre a szerkezet, mintha a szabvány által előírt  $L/1000$  nagyságú geometriai hiba és sajátfeszültség

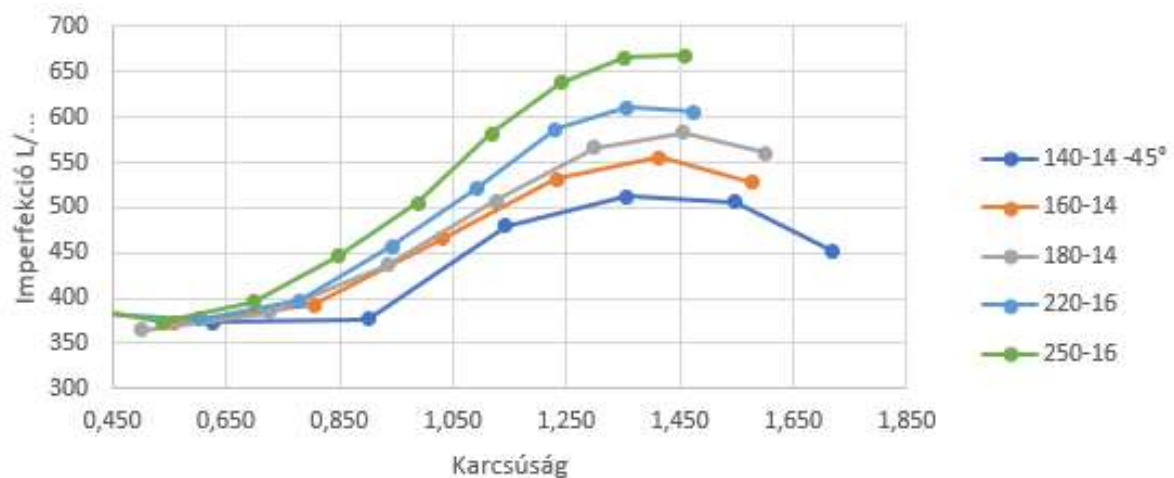
van a modellen. Minden tartó típus és minden karcsúság esetén meghatároztam a teherbírást  $L/1000$ +sajátfeszültség és 4-5 féle ekvivalens geometriai imperfekció esetén, majd lineáris interpolációval meghatároztam helyettesítéshez szükséges ekvivalens geometriai imperfekciót, erre egy példát a 39. ábra mutat be.

1. km: 140-14-45°					
$\lambda_{LT}$ =0,328	Teher	Hullám	Hossz	alfa_crit	Teherbírás
Imperfekció	M [kNm]	n [db]	L [m]		M_R [kNm]
L / 600	400	3	1,004	0,907125	362,85
L / 500				0,901531	360,6124
L / 400				0,892891	357,1564
L / 300				0,878547	351,4188
L / 200				0,853281	341,3124
L/1000 + sajátfeszültség				0,8985	359,4072



**39. ábra:** A szükséges ekvivalens geometriai imperfekció meghatározása különböző karcsúságok esetén.

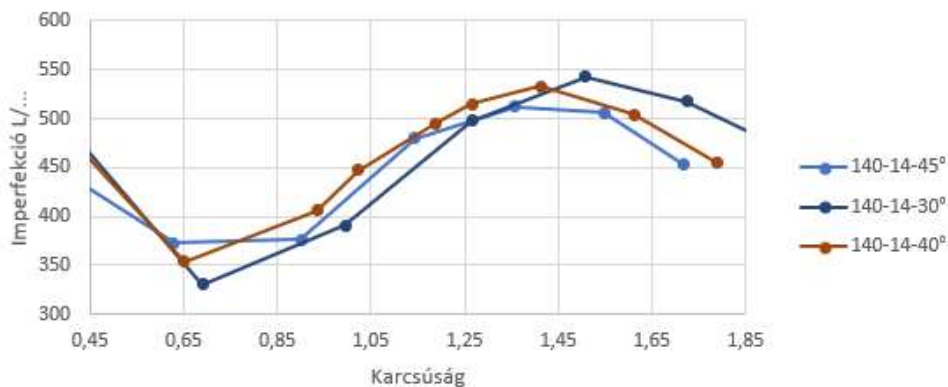
Ezután a kapott ekvivalens geometriai imperfekciókat ábrázoltam a karcsúság függvényében, melyet a 40. ábra mutat be.



**40. ábra:** Az övlemez méretének változtatásának hatása az eredményekre.

A 40. ábra azt mutatja, milyen hatása van az övlemez méretének és a kifordulási karcsúságnak a szükséges helyettesítő geometriai imperfekció értékére. Az eredmények alapján látható, hogy a görbék jellege minden keresztmetszet esetén megegyezik, és látszik, hogy a nagyobb övlemezek esetén kisebb ekvivalens geometriai imperfekció fogja helyettesíteni a sajátfeszültséget és a geometriai hibát. ( $L/x$  kisebb, ha  $x$  nagyobb). A diagramon az is látható, hogy 0,7-nél kisebb karcsúságnál a különbségek jóval kisebbek, míg a görbék tetőpontjainál nagyobb eltéréseket tapasztaltam.

A 41. ábra azt mutatja be, hogy a trapézlemez-profilnak, az iránytörési szögnek milyen hatása van a szükséges ekvivalens geometriai imperfekcióra. Eszerint az iránytörés szögének változása kisebb hatású, az eredmények közötti különbség nem jelentős.

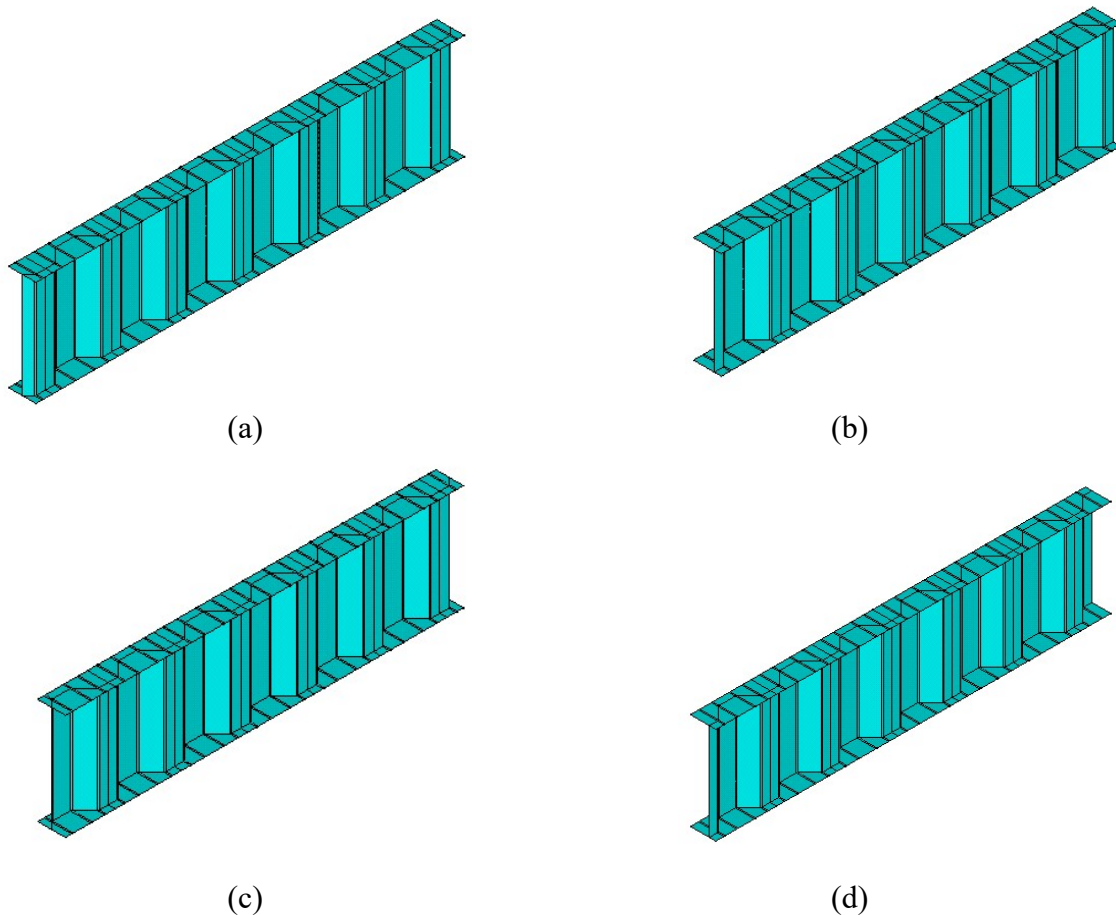


**41. ábra:** A trapézlemez iránytörési szögének hatása az eredményekre.

Az eredmények tehát azt mutatják, hogy a helyettesítő geometriai imperfekció karcsúság és keresztmetszefüggő. Egyszerűsítésként egy konstans értékű ( $L/350$ ) helyettesítő geometriai imperfekciót lehetne alkalmazni, ami minden vizsgált geometriánál és karcsúsági tartományban a biztonság oldalán van, a nagyobb karcsúsági tartományban azonban nagyobb mértékben van a biztonság oldalán. Ahogy a 7.3. fejezetben említettem, a BME laboratóriumi kísérletsorozata során ezzel szemben a legkedvezőtlenebb szükséges ekvivalens geometriai imperfekció  $L/750$  volt, az átlag pedig  $L/2049$  volt, ami igazolja, hogy a fenti értékek a biztonság oldalán vannak. A következő fejezetekben a hagyományos, csökkentő tényezős eljárás kapcsán mutatom be az eredményeimet.

## 9. Különböző gerinc kialakítású tartók összehasonlítása

Trapézlemez-gerincű tartók esetében változhat az is, hogy a gerinc épp milyen periódussal ér véget: a tartó hossz tengelyében (ferde szakasszal), vagy egy fél amplitúdónyit kitérve a középvonalból (párhuzamos szakasszal). Felmerült a kérdés, hogy ezeknek a különbségeknek van-e hatása a gerenda rugalmas kritikus nyomatékára vagy a tartó teherbírására. Négy eltérő esetet vizsgáltam: tengelyesen- vagy pontszimmetrikus tartókat a gerinc ferde, illetve hossz tengellyel párhuzamos élével indulva. A tengelyesen szimmetrikus tartóknál azt is megnéztem, hogy van-e hatása annak, melyik irányban indul el a hullámozás a tartó két végén, ezért ezekből a tartókból két-két változatot vizsgáltam. Az imperfekció ezekben a modellekben kivétel nélkül  $L/1000$  volt, a megtámasztás csuklós. A 42. ábrán a négy különböző gerenda szemlélteti a különbséget, a baloldali oszlop tartalmazza a ferde szakasszal, a jobb oldali a párhuzamos szakasszal induló (és záródó) tartókat, azok a gerendák, amelyek a felülnézetben tengelyesen szimmetrikusak, a felső sorban, a pontszimmetrikusak pedig az alsó sorban vannak.

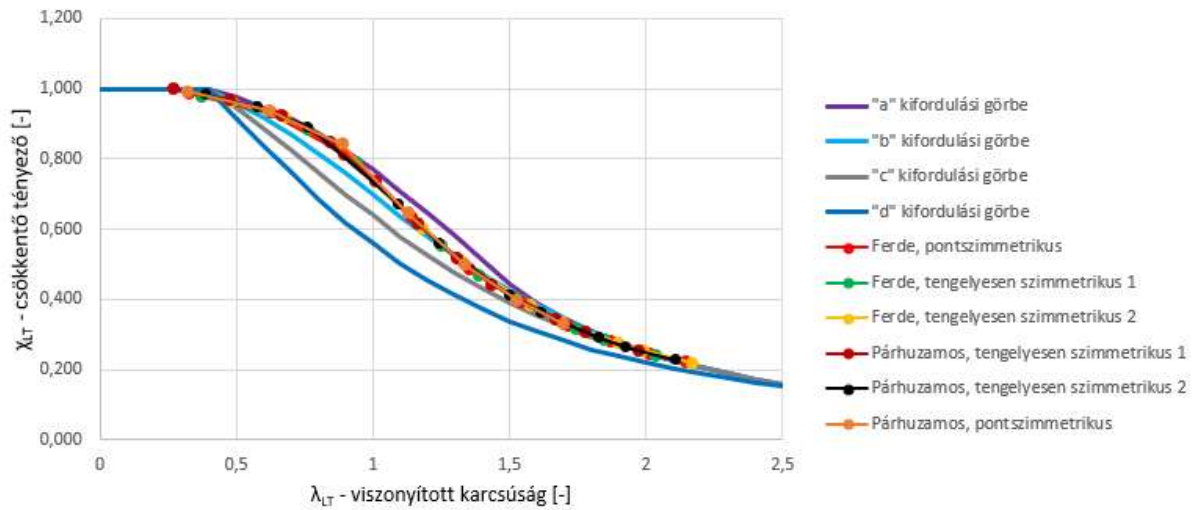


**42. ábra:** A különböző vizsgált tartógeometriák:

- (a) ferde, tengelyesen szimmetrikus
- (b) párhuzamos, tengelyesen szimmetrikus
- (c) ferde, pontszimmetrikus
- (d) párhuzamos, pontszimmetrikus.

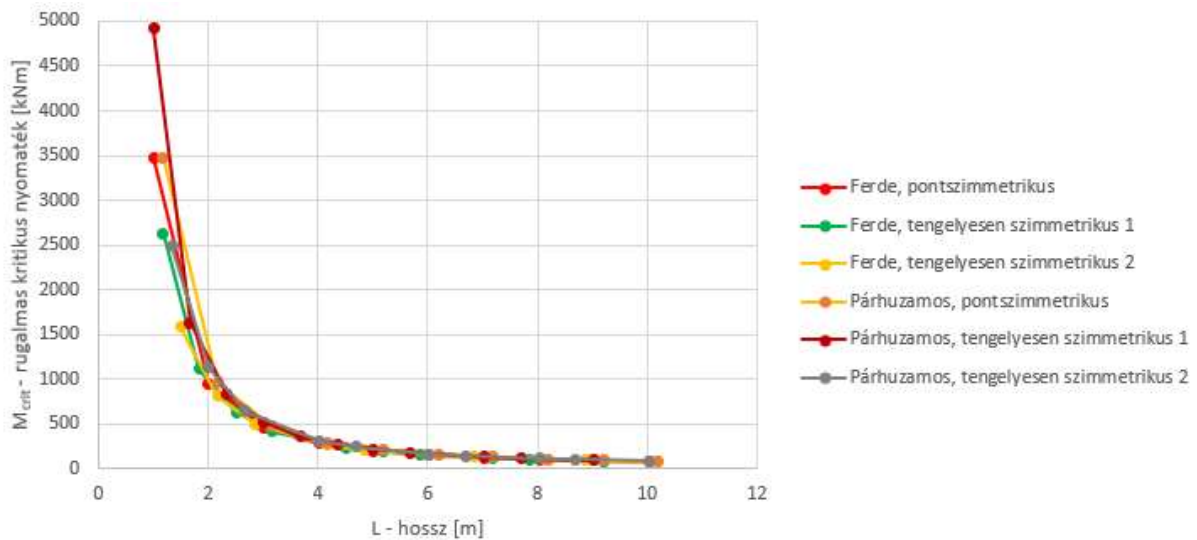


A futtatások eredményei mindegyik kialakítás esetén azonos kifordulási viselkedést, és azonos teherbírást eredményeztek, amelyek a kifordulási görbéken teljesen egymásra illeszkednek, melyet a 43. ábra mutat be.



**43. ábra:** Különböző gerinc kialakítású tartók kifordulási csökkentő tényezője  $L/1000$ -es ekvivalens geometriai imperfekció alkalmazásával.

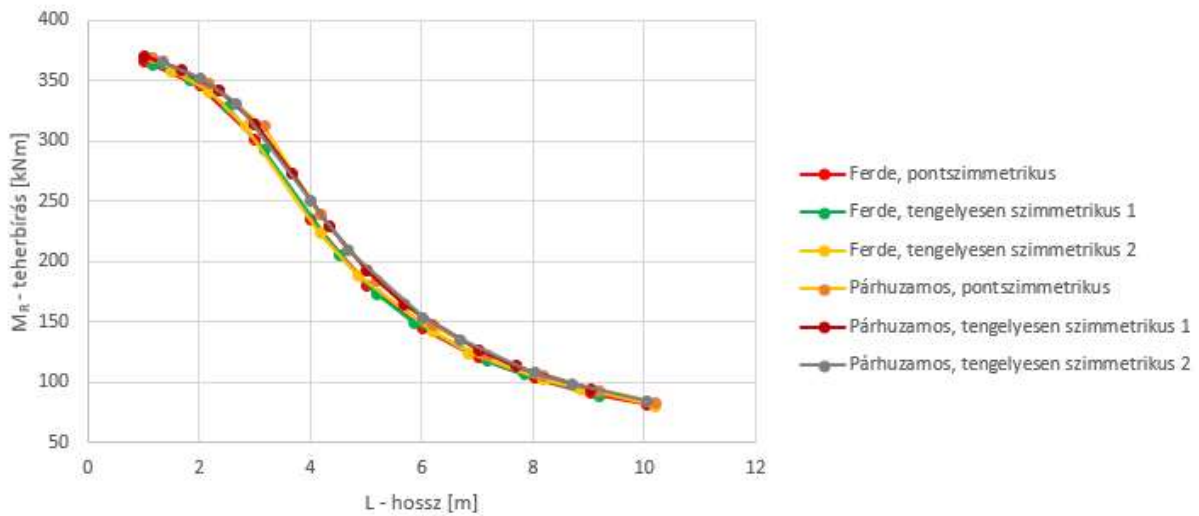
A tökéletes, imperfekció nélküli szerkezet tönkremeneteléhez tartozó rugalmas kritikus nyomatékot is ábrázoltam diagramon a különböző kialakítású tartók esetén a hossz függvényében. Ezt mutatja be a 44. ábra.



**44. ábra:** Különböző gerinc kialakítású tartók rugalmas kritikus nyomatéka.

A diagramon látható, hogy a nagy támaszközök esetén gyakorlatilag nincs különbség, egyedül a rövid tartóknál térnek el egymástól a görbék, de a tendencia itt is azonos. A nem-tökéletes szerkezet tönkremeneteléhez tartozó nyomaték (kifordulási ellenállás) nagyságát mutatja a 45. ábra megint csak a hossz függvényében. Ebből a diagramból az derül ki, hogy a kapott görbék jellege minden gerinc kialakításnál nagyon hasonló és a párhuzamos szakasszal véget érő

gerincek esetén egy kicsivel nagyobb teherbírást kapunk, mintha ferde szakasszal ér véget a gerinc. A különbség mindössze néhány százalék, elhanyagolható nagyságú.



**45. ábra:** Különböző gerinc kialakítású tartók teherbírási ellenállása.

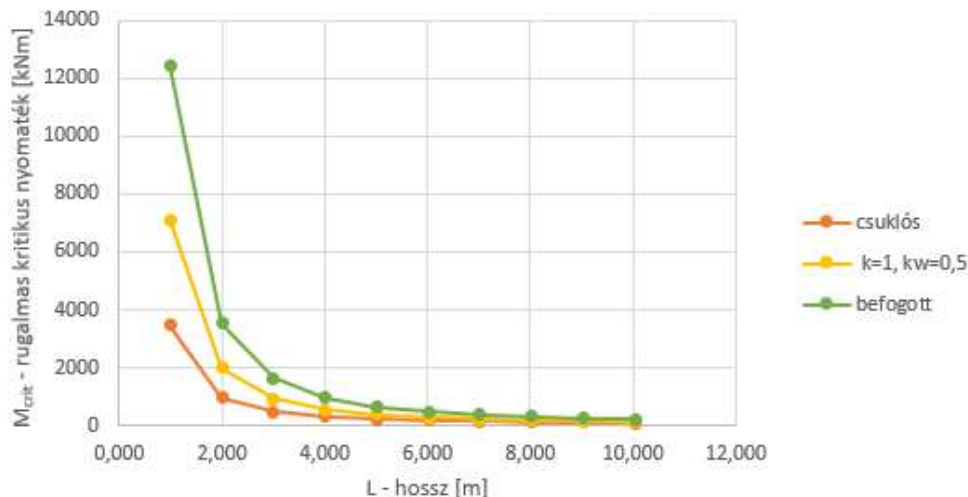
Tehát összességében azt láthatjuk, hogy a gerinc kialakításának nincsen jelentős hatása sem a rugalmas kritikus nyomatékra, sem a tartó teherbírására. A determinisztikus vizsgálat során ferde szakasszal induló, pontszimmetrikus tartókat vizsgáltam.

## 10. Megtámasztások hatása

Végeztem futtatásokat a megtámasztás hatásának vizsgálatára is. Háromféle megtámasztást alkalmaztam, az első a tisztán csuklós eset volt, ahol a tartó végkeresztmetszete el tudott fordulni és öblösödni is tudott, a második megtámasztási módnál az öblösödés már gátolva volt és a harmadiknál pedig befogást alakítottam ki a végkeresztmetszet tekintetében, se öblösödni, se elfordulni nem tudott a tartóvég. A vizsgálat során minden megtámasztás esetén tíz különböző hosszt vizsgáltam, 1-10 méteres támaszközzel.

### 10.1. Megtámasztások hatása a rugalmas kritikus nyomatéokra

A megtámasztás hatását a rugalmas kritikus nyomaték nagyságára a 46. ábra mutatja. Három különböző színnel vannak jelölve a három különböző megtámasztási módhoz tartozó eredmények.

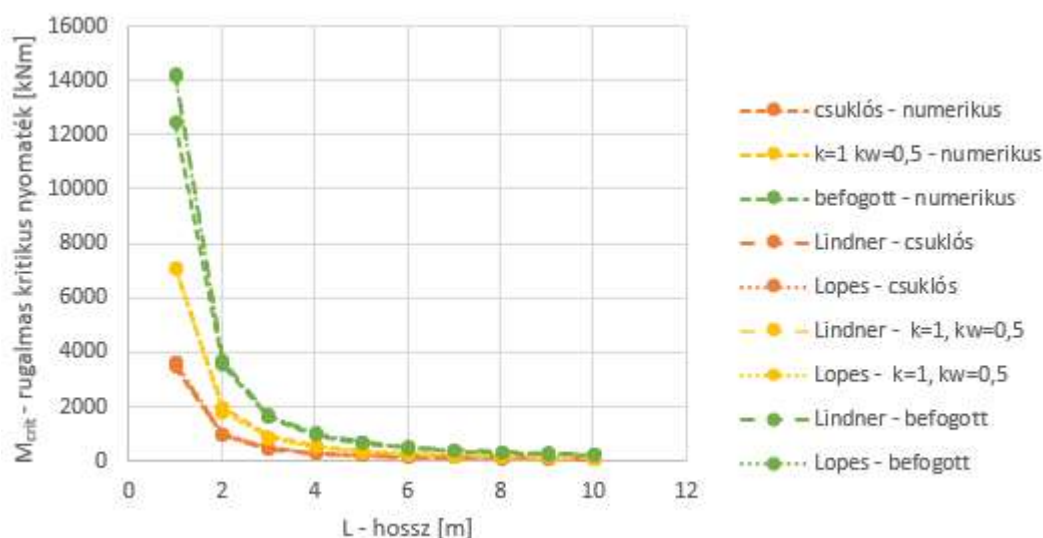


46. ábra: Megtámasztás hatása a rugalmas kritikus nyomatéokra.

Az ábrán jól látszik a tendencia, miszerint a csuklós megtámasztáshoz tartozik a legkisebb, a befogáshoz pedig a legnagyobb rugalmas kritikus nyomaték.

### 10.2. Szakirodalmi javaslatok alapján és numerikusan számított $M_{crit}$ -ok összehasonlítása

Az előző pontban bemutatott hosszok és megtámasztások esetére kiszámítottam a rugalmas kritikus nyomatékokat Lindner, illetve Lopes által javasolt formulákkal is. A képletek a 3.1. és 3.3. fejezetekben kerültek bemutatásra. A három számítási móddal kapott eredményeket most is hossz – rugalmas kritikus nyomaték diagramon ábrázoltam, ez látható a 47. ábrán. A diagramon az eltérő színek most is az eltérő megtámasztásokat mutatják, a vonal típusa változik a különböző számítási módszerek esetén.



**47. ábra:** Szakirodalmi javaslatok alapján és numerikusan számított rugalmas kritikus nyomaték összehasonlítása különböző megtámasztások esetén.

A diagramon nem látványosak az eltérések a háromféle számítási módszer esetén, tehát látható, hogy a kézi számítási módszerek viszonylag jól közelítik a numerikus számítást. A konkrét számértékek vizsgálatából az derült ki, hogy a vizsgált tartományon 17,5% eltérés volt a legnagyobb.

	M <sub>crit</sub> - csuklós		M <sub>crit</sub> - k=1, kw=0,5		M <sub>crit</sub> - befogott	
	Lindner	Lopes	Lindner	Lopes	Lindner	Lopes
absz. max.	<b>3,7%</b>	<b>12,9%</b>	<b>8,5%</b>	<b>10,9%</b>	<b>17,5%</b>	<b>12,3%</b>
max.	3,6%	12,9%	7,6%	0,0%	17,5%	12,3%
max. (2 m < L)	0,6%	12,9%	7,6%	-2,8%	17,5%	8,1%
átlag	-1,6%	8,9%	-0,9%	-6,6%	10,6%	5,5%

**10. Táblázat:** Szakirodalmi javaslatok alapján és numerikusan számított rugalmas kritikus nyomaték eltérései különböző megtámasztások esetén.

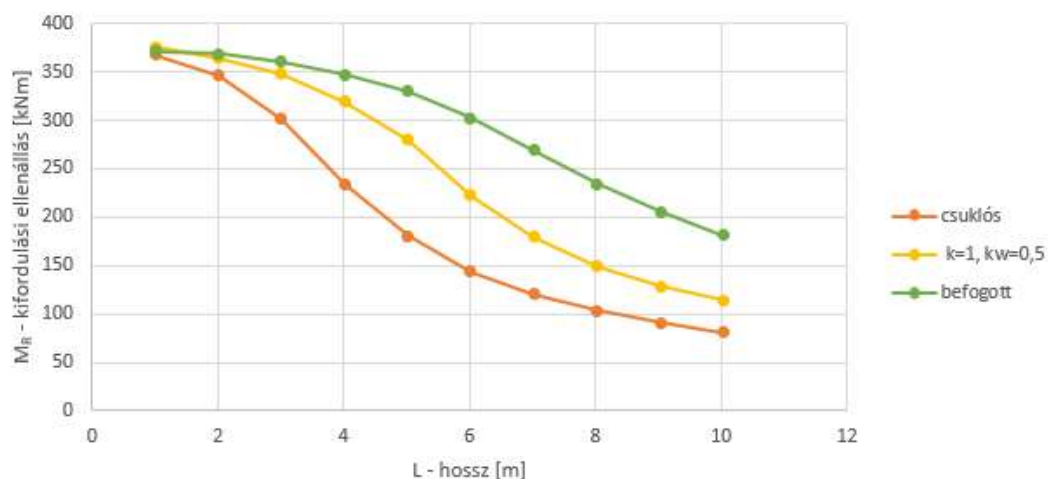
A 10. táblázatban látható, hogy abszolútértékben maximum hány százalék eltérés volt a kézi számítással kapott eredmények és a megfelelő numerikus számítás eredményei között. A statisztikából az derült ki, hogy Lindner közelítése a csuklós megtámasztás esetén egészen pontos, és annál a megtámasztásnál is pontosabban közelítette a numerikus eredményeket, mint Lopes formulája, ahol a tartó végkeresztmetszete el tudott fordulni, de az öblösödés meg volt gátolva. Lopes képlete egyedül a befogott támasz esetén bizonyult pontosabbnak Lindner javaslatánál, de ott is több, mint 10% eltérést mutatott – igaz, csak a legrövidebb tartóhossz esetén. Ennek kapcsán fontos kihangsúlyozni, hogy a legrövidebb támaszköz esetén a viszonylag nagy eltéréseket az magyarázza, hogy a numerikus számítás során itt nem tisztán kifordulás volt a sajtáalak, hanem kombinálódott övlemezhorpadással.

A 10. táblázatban az abszolútértékben maximum értékeket követő sorban az a maximum eltérés van feltüntetve, amely a biztonság kárára van, tehát ahol a kézi számítás nagyobb rugalmas kritikus nyomatékot eredményezett, mint a numerikus számítás. Ez a csuklós és a befogott megtámasztás esetén nem okozott különbséget, egyedül a harmadik esetben, ahol látható, hogy Lopes formuláját használva minden esetben a biztonság oldalán voltunk. A következő sorban az látható, hogy mi az eredmény, amennyiben a legrövidebb tartót nem vesszük figyelembe, hiszen ott a numerikus számítás nem a tiszta esetet adta.

Összességében azt lehet megállapítani, hogy a kézi számítás viszonylag jól követi a numerikus eredményeket, legkevésbé a befogott esetben pontos, és egyedül ebben az esetben pontosabb Lopes formulája. A másik két megtámasztás esetén Lindner képletével számolva 10%-nál kisebb különbségek adódnak.

### 10.3. Megtámasztások hatása a kifordulási ellenállásra

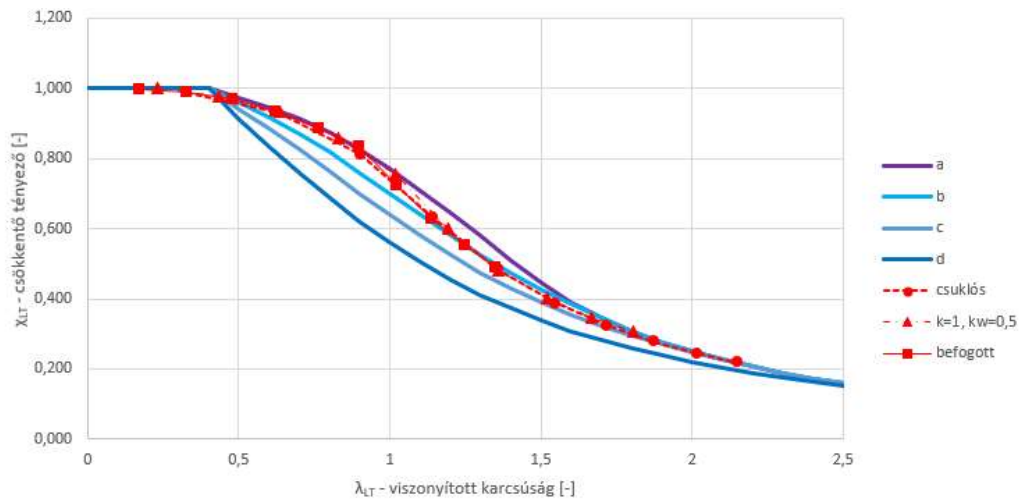
A megtámasztás hatását a teherbírásra a 48. ábra mutatja. A várakozásnak megfelelően a csuklós tartónak lesz a legkisebb a teherbírása, a befogottnak pedig a legnagyobb.



**48. ábra:** Megtámasztás hatása a teherbírásra.

A diagramból az is látható, hogy a befogott tartók esetén a hossz növelése a teherbírás kisebb mértékű csökkenéséhez vezet, míg a csuklós tartóknál jóval meredekebb görbét kapunk.

A 49. ábrán a viszonyított karcsúság – csökkentő tényező diagramon ábrázoltam az eredményeket. Látható, hogy a megtámasztástól függetlenül a pontok egy görbére esnek, minimális eltéréseket tapasztaltam. Ezért a továbbiakban egyedül csuklós-csuklós megtámasztású tartókat vizsgáltam, mivel látható, hogy a megtámasztás hatását a karcsúságszámítás módszere kellő pontossággal tudja figyelembe venni.



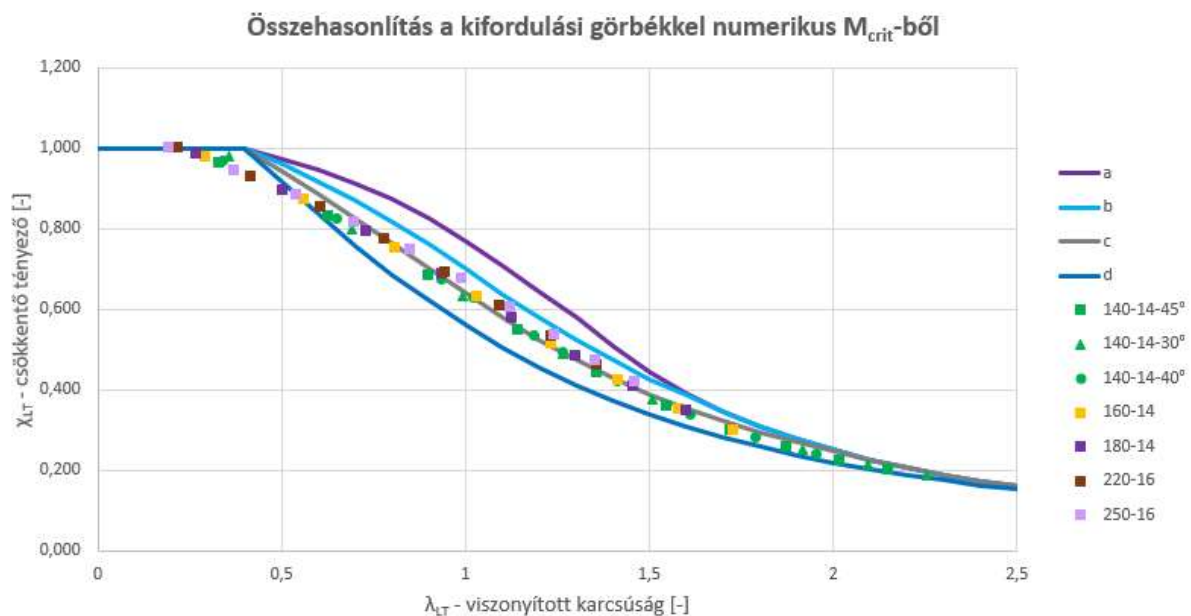
**49. ábra:** Megtámasztás hatása a kifordulási csökkentő tényezőre.

Ez a vizsgálat egyébként azt is igazolja, hogy a BME Hidak és Szerkezetek tanszék által végzett kísérleti eredmények, melyekben a tartó öblösödése jelentősen meg volt gátolva nagy pontossággal átkonvertálhatók a csuklós-csuklós modell eredményeire, és a kísérleti eredmények azokkal összehasonlíthatóvá tehetők.

## 11. Determinisztikus vizsgálat eredményei

### 11.1. Eredmények a numerikus modellel számított karcsúság alapján

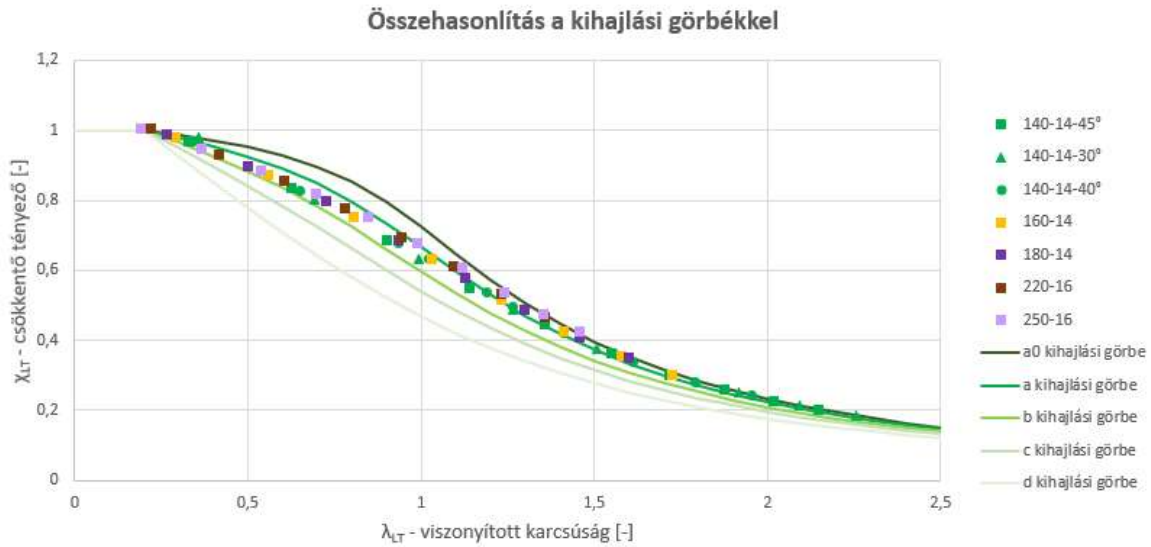
A determinisztikus vizsgálat során ötféle keresztmetszetet vizsgáltam, ezek az övlemez méreteikben tértek el. A tartók gerincmagassága minden esetben 520 mm volt, és a gerinc szélessége 6 mm. A keresztmetszetek kétszeresen szimmetrikusak voltak; az ötféle övlemez mérete a következő: 140-14, 160-14, 180-14, 220-16, 250-16 (öv szélesség – öv vastagság mm-ben). A 140-14-es övű gerendák esetében háromféle trapézprofilal dolgoztam, az eltérés csak az iránytörés szögében volt: a hagyományos 45°-on kívül 30°-ot és 40°-ot vizsgáltam. Ezeket a tartókat 9-10 féle hossz esetén vizsgáltam, és végül ábrázoltam a viszonyított karcsúság - kifordulási csökkentő tényező diagramon az eredményeket. A megtámasztás mindig csuklós volt, a geometriai hiba  $L/1000$  volt és ezen kívül saját feszültséget is figyelembe vettem a korábbiakban bemutatottak szerint. A determinisztikus vizsgálat által kapott numerikus eredményeket az Eurocode kifordulási görbével (a, b, c, d) összehasonlítva az 50. ábra mutatja. Az összehasonlításnál a relatív karcsúságot a numerikus modellel meghatározott rugalmas kritikus nyomaték alapján határoztam meg, melyet a legpontosabb megoldásnak tartok.



**50. ábra:** A determinisztikus vizsgálat során kapott eredmények összehasonlítása a kifordulási görbékkel.

Látható, hogy a számítási eredmények, ha nem is teljesen pontosan, de egy görbére illeszkednek, és a kifordulási görbék közül leginkább a „c” görbére illeszkednek. 0,75 alatti viszonyított karcsúság esetén azonban letérnek a görbéről, ezért érdemesnek tűnt megvizsgálni, hogy viszonyulnak a pontok a kihajlási görbékhez.

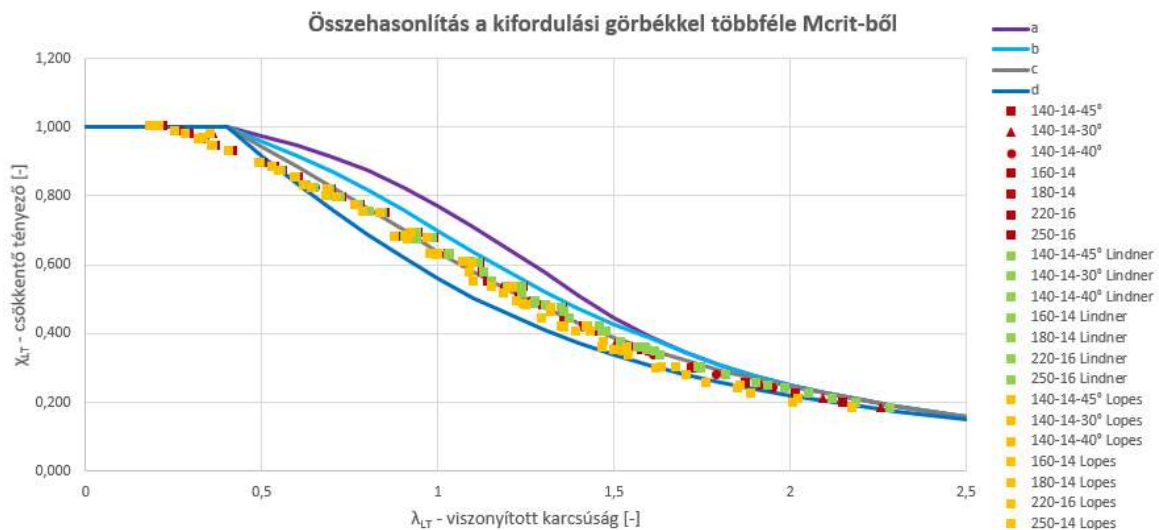
Az összehasonlítást az 51. ábra mutatja be, melyen látható, hogy a számítási eredmények az „a” és a „b” kihajlási görbék között helyezkednek el.



**51. ábra:** A determinisztikus vizsgálat során kapott eredmények összehasonlítása a kihajlási görbékkel

## 11.2. Eredmények a szakirodalmi ajánlások alapján számított karcsúsággal

A numerikus eredményeken túl azt is megvizsgáltam, mit kapunk, amennyiben a rugalmas kritikus nyomatókót a szakirodalmi ajánlásokban szereplő analitikus képletekkel számítjuk ki. Lindner és Lopes képleteivel is meghatároztam a csuklós tartók rugalmas kritikus nyomatókát és az ebből számított karcsúsággal ábrázoltam az eredményeket. A következő ábra azt mutatja be, hogyan viszonyulnak egymáshoz a szakirodalmi és numerikus eredmények. Az ábrán a három külön szín a karcsúság meghatározásának három különböző módjához tartozik. (52. ábra)



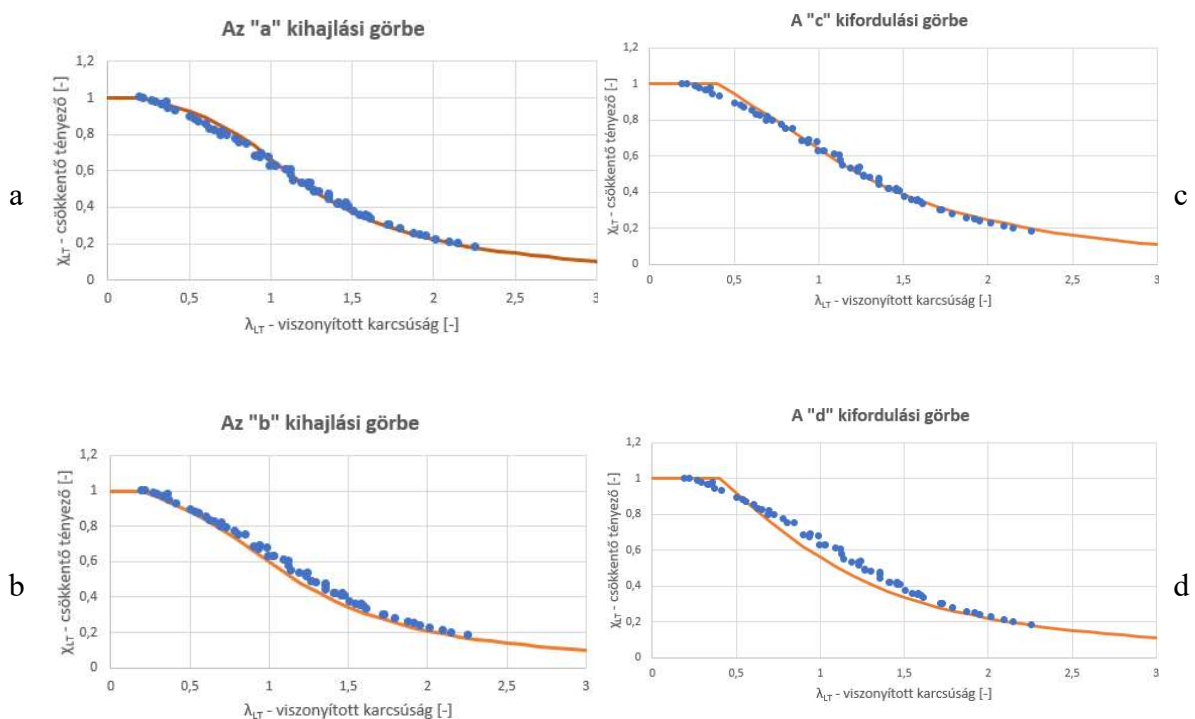
**52. ábra:** A szakirodalmi és numerikus eredmények összehasonlítása.



Az összehasonlításból látható, hogy legjobban a Lindner képlete alapján számított rugalmas kritikus nyomaték egyezik a numerikus eredményekkel. A numerikus és a Lindner javaslata szerint kapott rugalmas kritikus nyomaték között legfeljebb 3-5% eltérés mutatkozott, Lopes és a numerikusan számolt rugalmas kritikus nyomaték esetén pedig 10-13% különbség is volt. Az eredményekből egyértelműen látszik, hogy a legrövidebb tartóhossz esetén mindig viszonylag nagy eltérés volt a szakirodalmi és a numerikus eredmények között, mivel a numerikus számítás során nem volt teljesen tiszta kifordulás, hanem övlemezhorpadással kombinálódott. A szélesebb övű keresztmetszeteknél mindkét szakirodalmi ajánlás kisebb eltérést mutatott a numerikus eredménytől, mint a keskeny övű tartók esetében.

### 11.3. Az eredmények statisztikai kiértékelése, $\gamma_{M1}$ parciális tényező meghatározása

A statisztikai kiértékelés során a „c” és „d” kifordulási görbékkel, illetve az „a” és „b” kihajlási görbékkel vettem össze az eredményeket. A „d” kifordulási görbe és a „b” kihajlási görbe lényegében egy-egy alsó határoló görbe. A négy görbe és a numerikus modell eredményeivel való összehasonlításuk látható az 53. ábrán.



**53. ábra:** A determinisztikus vizsgálat eredményei és az „a”, „b” kihajlási görbe, illetve a „c”, „d” kifordulási görbe.

A négy görbe esetén a statisztikai kiértékelés ugyanolyan lépésekben történt. Először minden egyes karcsúság esetén megkerestem azt a csökkentőt tényezőt, amelyet az adott görbére való

pontos illeszkedés esetén kapnánk. A numerikus ( $\chi_{num}$ ) és az adott görbéhez tartozó csökkentő tényezők ( $\chi_a, \chi_b, \chi_c, \chi_d$ ) összehasonlítását a diagramon is ábrázoltam, melyeket az 54-57. ábrák mutatnak be. Ha a numerikus számításból kapott pontok pontosan az adott görbére estek volna, akkor az összes bemutatott pont mindig egy  $45^\circ$ -os ( $b=1,00$ ) vonalon feküdt volna. A gyakorlatban a pontok némi szórást mutatnak, amelyek megadják az egyes eredmények „hibáit” /eltéréseit. A statisztikai kiértékelést a 5.4. fejezetben megadottak szerint végeztem el, az (15)-(20), (23)-(26) és (31) formulák alkalmazásával. A végeredményül kapott  $\gamma_{M1}$  parciális tényezők az alábbi táblázatban vannak összefoglalva:

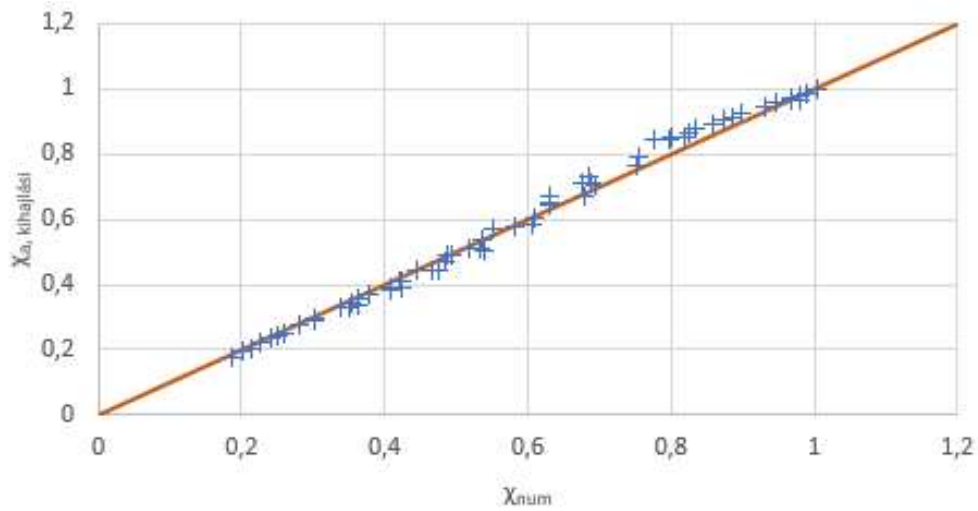
	$\gamma_{M1}$
"a" kihajlási görbe	1,06502
"b" kihajlási görbe	1,02321
"c" kifordulási görbe	1,06335
"d" kifordulási görbe	1,08110

**11. táblázat:** A statisztikai kiértékelés során kapott  $\gamma_{M1}$  parciális tényezők

A b görbe alkalmazható biztonságosan magasépítés területén, amelyik esetén 1,0 körüli  $\gamma_{M1}$  parciális tényező jön ki, és 1,1 alatti  $\gamma_{M1}$  parciális tényező teljesíti az EN 1990 biztonsági előírásait hídépítés területén. Nyilvánvalóan az adott határértéknél kisebb, de minél nagyobb értékű  $\gamma_{M1}$  parciális tényezőhöz tartozó görbét érdemes használni, különben feleslegesen túltervezzük a szerkezetet. A determinisztikus vizsgálat statisztikai kiértékelése alapján a legkisebb  $\gamma_{M1}$  parciális tényező a „b” kihajlási görbéhez tartozik, de mindegyik kihajlási és kifordulási görbe esetén 1,0 és 1,1 közötti értéket kaptunk.

A részletesebb eredmények a következő alpontokban látható: a numerikus számításokból kapott, illetve a különböző kifordulási, vagy kihajlási görbékhez tartozó csökkentő tényezők összehasonlítását diagramon is szemléltettem (54-57. ábra), illetve táblázatok (12-15. táblázat) foglalják össze az egyes görbék vizsgálata esetén a részeredményeket.

*Az „a” kihajlási görbe alapú kiértékelés*

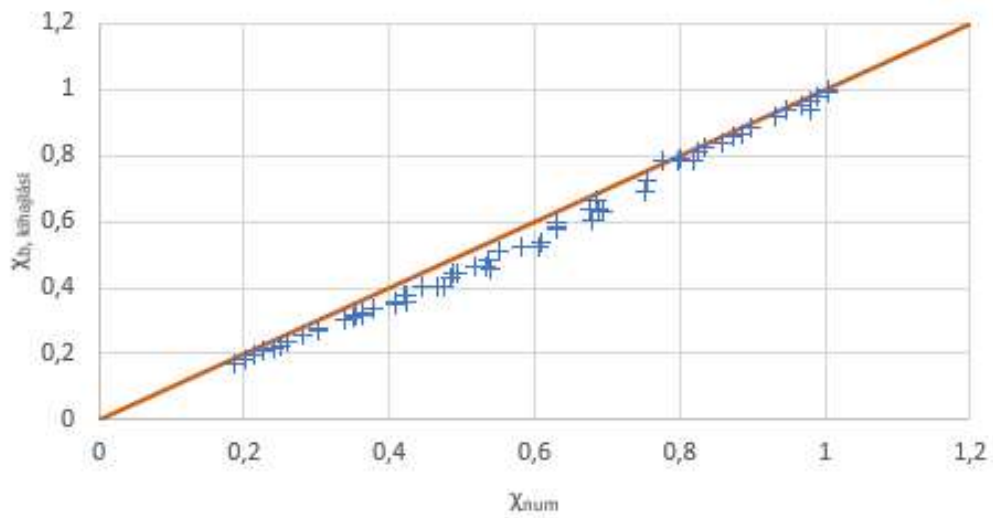


**54. ábra:** Összehasonlítás az „a” kihajlási görbével.

átlagos korrekciós tényező b:	0,9873
a hibatényezők logaritmusának átlaga $\Delta l$ :	0,0178
a hibatényezők szórás négyzete $s_{\Delta}^2$ :	0,0014
$V_{\delta}$ relatív szórás:	0,0378
$V_r$ relatív szórás:	0,0629
Q segédtényező:	0,0628
$\gamma_{M1}$ parciális tényező:	1,0650

**12. táblázat:** A statisztikai kiértékelés főbb tényezői az „a” kihajlási görbe esetén.

**A „b” kihajlási görbe alapú kiértékelés**

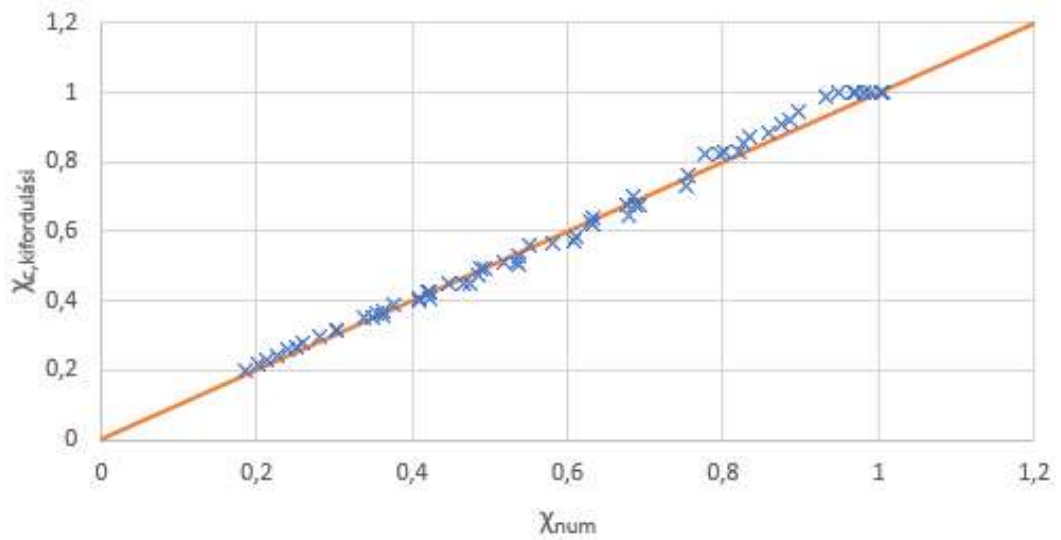


**55. ábra:** Összehasonlítás a „b” kihajlási görbével.

átlagos korrekciós tényező b:	1,0492
a hibátényezők logaritmusának átlaga $\Delta I$ :	0,0324
a hibátényezők szórás négyzete $s_{\Delta}^2$ :	0,0023
$V_{\delta}$ relatív szórás:	0,0481
$V_r$ relatív szórás:	0,0696
Q segédtényező:	0,0695
$\gamma_{M1}$ parciális tényező:	1,0232

**13. táblázat:** A statisztikai kiértékelés főbb tényezői a „b” kihajlási görbe esetén.

**A „c” kifordulási görbe alapú kiértékelés**

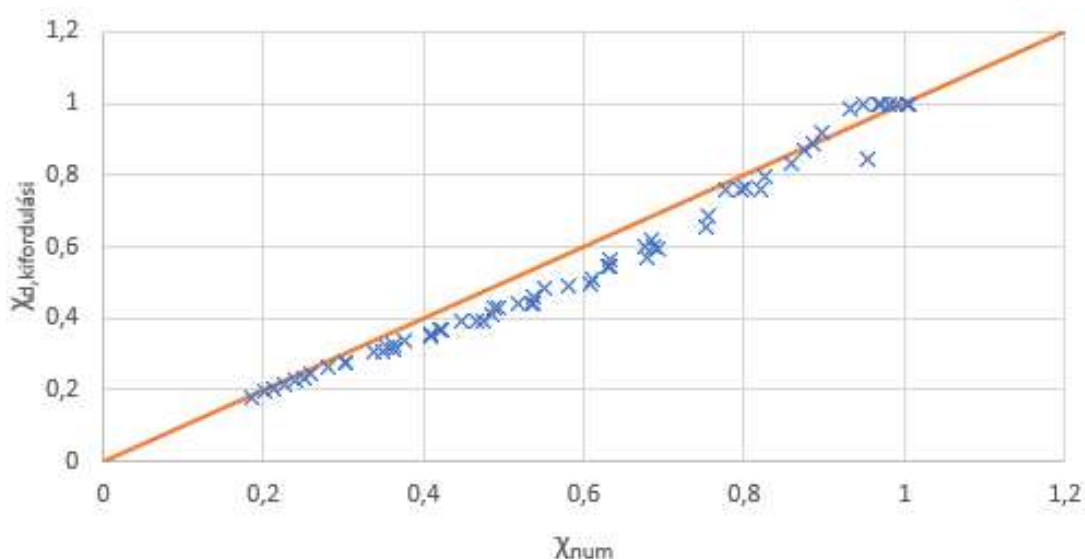


**56. ábra:** Összehasonlítás a „c” kifordulási görbével.

átlagos korrekciós tényező b:	0,9852
a hibatényezők logaritmusának átlaga $\Delta I$ :	0,0021
a hibatényezők szórás négyzete $s_{\Delta}^2$ :	0,0013
$V_{\delta}$ relatív szórás:	0,0357
$V_r$ relatív szórás:	0,0617
Q segédtényező:	0,0616
$\gamma_{M1}$ parciális tényező:	1,0633

**14. táblázat:** A statisztikai kiértékelés főbb tényezői a „c” kifordulási görbe esetén.

## A „d” kifordulási görbe alapú kiértékelés



57. ábra: Összehasonlítás a „d” kifordulási görbével.

átlagos korrekciós tényező b:	1,0495
a hibatényezők logaritmusának átlaga $\Delta l$ :	0,0418
a hibatényezők szórás négyzete $s_{\Delta}^2$ :	0,0051
$V_{\delta}$ relatív szórás:	0,0714
$V_r$ relatív szórás:	0,0874
Q segédtényező:	0,0872
$\gamma_{M1}$ parciális tényező:	1,0811

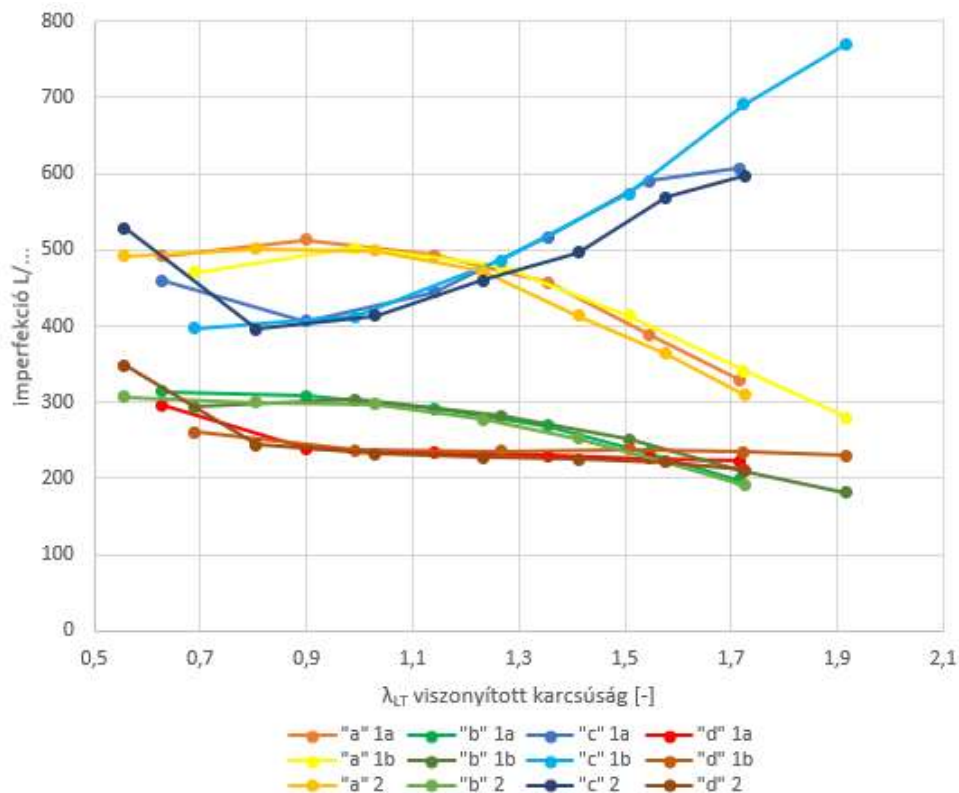
15. táblázat: A statisztikai kiértékelés főbb tényezői a „d” kifordulási görbe esetén.

### 11.4. Kifordulási görbékhez tartozó helyettesítő geometriai imperfekció

A determinisztikus vizsgálat eredményei alapján meghatároztam, hogy az egyes karcsúságok esetén milyen helyettesítő geometriai imperfekció alkalmazásával kapható vissza a szabvány egyes kihajlási, illetve kifordulási görbéihez tartozó teherbírás érték. Az eljárás, amivel a szükséges helyettesítő geometriai imperfekciót megkaptam, lényegét tekintve megegyezett a 8.2. fejezetben leírtakkal, ahol az  $L/1000$  nagyságú geometriai hiba és a sajátfeszültség hatását helyettesítő ekvivalens geometriai imperfekciót határoztam meg.

Háromféle tartót vizsgáltam, az alapeset a 140-14 mm-es övlemezű és  $\alpha=45^\circ$ -os szögtörésű tartó volt, majd egy ettől eltérő keresztmetszetű (160-14 mm-es övlemez,  $\alpha=45^\circ$ ), illetve eltérő törésszögű (140-14 mm-es övlemez,  $\alpha=30^\circ$ ) gerendát alkalmaztam. Az eredmények azt mutatják, hogy nem volt hatása se a keresztmetszet, se a törésszög módosításának. Az 58. ábrán

négy különböző színnel ábrázoltam a szabvány négy vizsgált görbéjéhez kapott eredményeket, látható, hogy a három-három azonos színű görbe jó egyezést mutat.



**58. ábra:** A szabvány „a” és „b” kihajlási görbéjéhez, ill. „c” és „d” kifordulási görbéjéhez tartozó teherbírás értékek visszanyeréséhez szükséges helyettesítő geometriai imperfekcio a viszonyított karcsúság függvényében

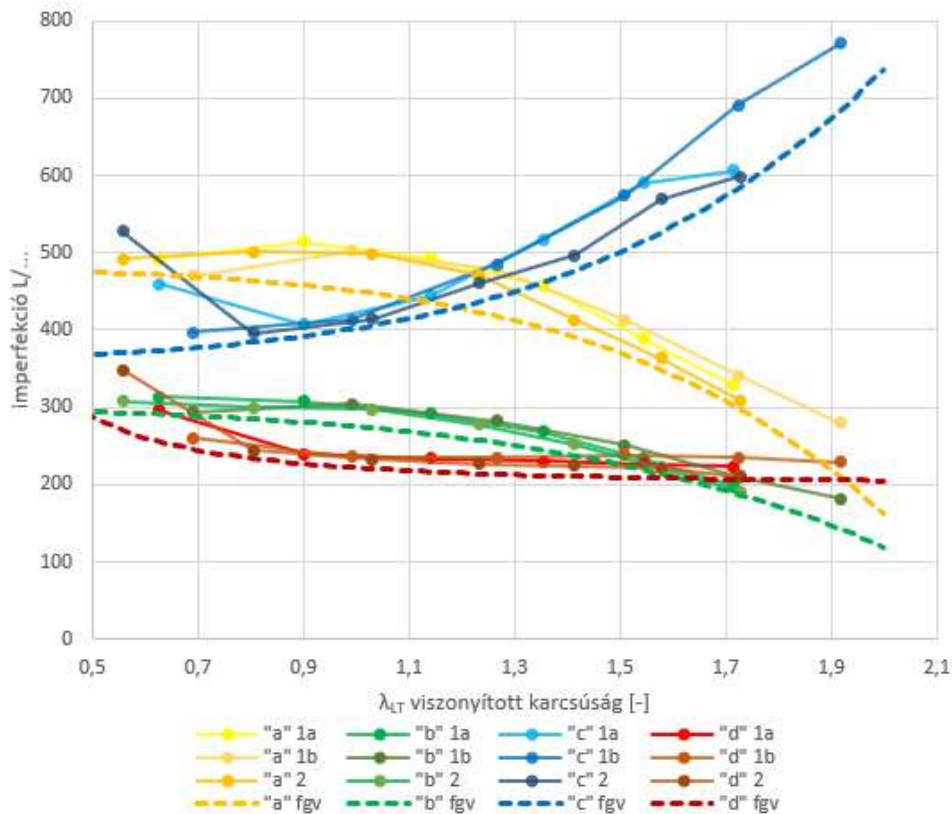
A négy görbe esetére felírtam négy közelítő függvényt, amelyek egyedül a viszonyított karcsúságtól függenek. A (39)-(42) egyenletek adják meg a függvényeket, és az 59. ábrán láthatóak szaggatott vonalakkal megjelenítve.

„a” kihajlási görbe esetén: 
$$f_a(\lambda_{LT}) = -(\lambda_{LT} + 0,85)^{5,5} + 480 \quad (39)$$

„b” kihajlási görbe esetén: 
$$f_b(\lambda_{LT}) = -(\lambda_{LT} + 0,95)^{4,8} + 300 \quad (40)$$

„c” kifordulási görbe esetén: 
$$f_c(\lambda_{LT}) = (\lambda_{LT} + 1)^{5,4} + 360 \quad (41)$$

„d” kifordulási görbe esetén: 
$$f_d(\lambda_{LT}) = \frac{22}{\lambda_{LT}^2} + 200 \quad (42)$$



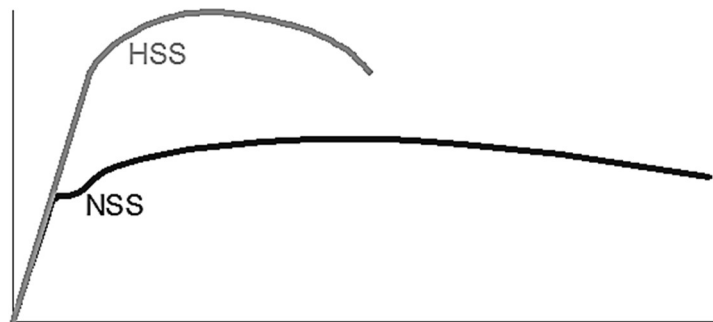
59. ábra: A szükséges helyettesítő geometriai imperfekció közelítése függvényekkel

A 8.2. fejezetben bemutattam, hogy az eddigi eredmények alapján  $L/350$  nagyságú helyettesítő geometriai imperfekció alkalmazásával minden karcsúság esetén a biztonság oldalán maradunk. A 11.3. fejezetben láthattuk, hogy 1,1-es  $\gamma_{M1}$  parciális tényező alkalmazása esetén, mind a négy vizsgált kihajlási, vagy kifordulási görbe biztonságosan használható a tervezéshez. Ezen fejezet alapján pedig megállapítható, hogy az „a” kihajlási görbe, valamint a „c” kifordulási görbe alkalmazása esetén bizonyos karcsúsági tartományokban  $L/350$ -nél kisebb helyettesítő geometriai imperfekciót kell alkalmazni a modellezés során, a szükséges emplitúdó értéke pedig függ a viszonyított karcsúság értékétől. A „b” kihajlási és „d” kifordulási görbék esetén a közelítő függvény minden karcsúság esetén  $L/350$ -nél nagyobb ekvivalens geometriai imperfekciót ad, ami természetesen biztonságosan használható.



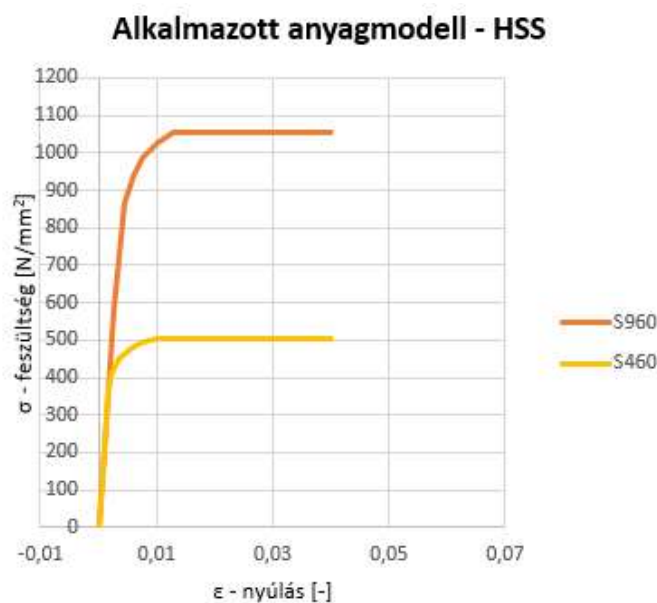
## 12. Anyagminőség hatása

A determinisztikus vizsgálatot követően felmerült a kérdés, vajon milyen hatása van az anyagminőségnek a kifordulási ellenállásra. Napjainkban a nagy szilárdságú acélok (HSS – S420 és magasabb szilárdsági osztályú acélok S960-ig) alkalmazása az építőmérnöki gyakorlatban egyre nagyobb ütemben növekszik a HSS szerkezetek számos előnyös tulajdonságának köszönhetően. Emiatt a normál szilárdságú acélok (NSS) vizsgálata mellett, nagy szilárdságú acélokat is használtam. Ötféle tartót vizsgáltam, az egyetlen különbség az ötféle tartó anyagminőségében volt: S235, S275, S355, S460 és S960-as acélt alkalmaztam.



**60. ábra:** Feszültség – elmozdulás diagram nagy, - és normál szilárdságú acél esetén.

A nagy szilárdságú acélok viselkedése eltér a normál szilárdságú acélokétól. Természetesen a legfontosabb különbség, amiről a neve is árulkodik, a megnövekedett szilárdság, de nagyon fontos az is, hogy nagyszilárdságú acélok szakítóvizsgálatánál nem figyelhető meg a képlékeny, ill. felkeményedő szakasz. A 60. ábrán látható a nagy szilárdságú acélokhoz, illetve a normál szilárdságú acélokhoz tartozó tipikus szakítógörbe.



**61. ábra:** A modellezés során alkalmazott S960 és S460 acél feszültség-nyúlás görbéje

A  $\sigma$ - $\epsilon$  diagramon látható, hogy a kezdeti rugalmassági modulus csökkenésével ugyan, de folyamatosan emelkedő tendenciát mutat egészen a szakítószilárdság eléréséig. Ezért az acél folyáshatára a 0,2%-os maradó nyúláshoz tartozó egyezményes folyáshatárral jellemezhető. Ezért a nemlineáris számításhoz S960-as anyag alkalmazásánál a korábban bemutatottaktól eltérő anyagmodellt kellett használnom a numerikus modellben, ezt mutatja a 61. ábra.

A nagy szilárdságú acélok esetén más sajátfeszültség modellt kell használni, mint a normál szilárdságú trapézlemez-gerincű tartó esetében. Kísérleti eredmények igazolják ugyanis, hogy a hegesztés és hidegalakítás közben kialakuló nyomó sajátfeszültségek nem nőnek a folyáshatárral egyenesen arányosan, ezért a folyáshatárhoz képest arányosan kisebb lesz a nyomó sajátfeszültség. A nagyszilárdságú acél anyagú tartók esetén ezért annyiban módosítottam a korábban bemutatott sajátfeszültség-modellt, hogy a nyomott zónákban fellépő nyomófeszültséget az S490-as és S960-as acélok esetén rendre az S335-ös acélhoz viszonyítva vettem fel.

### 12.1. Anyagminőség hatása a kifordulási ellenállásra

Az eredményeket hossz-teherbírás diagramon ábrázoltam, a 62. ábrán látható a teherbírás alakulása különböző hosszok és anyagminőségek esetén.

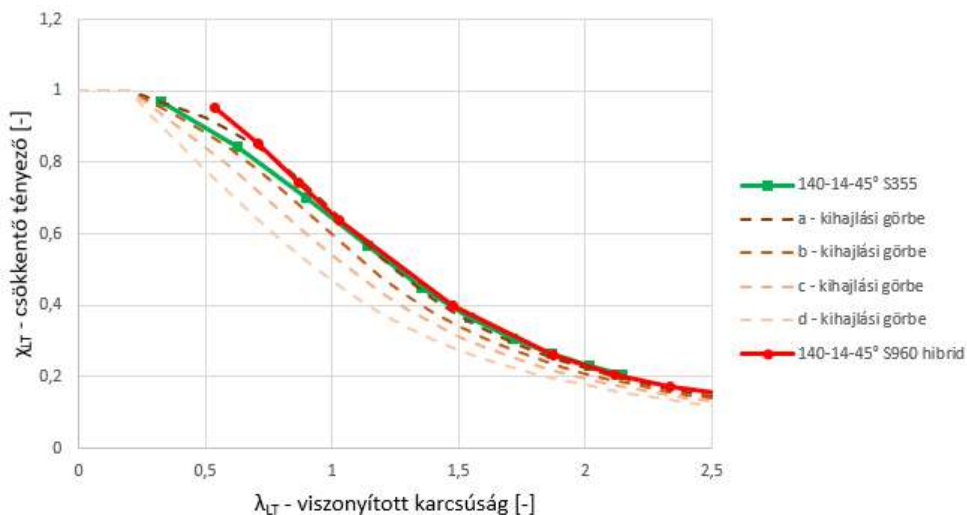


**62. ábra:** Az anyagminőség hatása a kifordulási ellenállásra.

Látható, hogy a hossz növekedésével egyre kisebb eltérés van az öt görbe között, megfelelően nagy karcsúság esetén gyakorlatilag nincs hatása az anyagminőségnek a kifordulási ellenállásra.

## 12.2. Hibrid tartók vizsgálata

Ezután két-két anyag kombinációjával ún. hibrid tartókat vizsgáltam, (i) az egyiknél a gerinc S235-ös acélból, az övek pedig S460-as acélból, (ii) a másikonál a gerinc S355-ös acélból, az övek pedig S960-as acélból voltak kialakítva. Az eredményeket rendre összehasonlítottam a teljes egészében S460-as acél anyagból, illetve teljes egészében S960-as acél anyagból készített tartónál kapott kifordulási ellenállás értékekkel. A kapott teherbírás értékekben minden karcsúság esetén kevesebb, mint 2,5% eltérés volt, ami jól igazolta az elvárásokat, miszerint a gerinc hatása minimális a kifordulási ellenállásra. Ez alapján tehát mindenképpen jelentősen költséghatékonyabb megoldáshoz jutunk, amennyiben a nagyszilárdságú acél öveket normál szilárdságú acél gerinccel kombináljuk, mintha a teljes szerkezet nagyszilárdságú acélból készül, és a kifordulási ellenállás gyakorlatilag változatlan marad.



**63. ábra:** S355, illetve S960-S355 hibrid tartó összehasonlítása viszonyított karcsúság – csökkentő tényező diagramon a szabvány kihajlási görbéivel

A hibrid tartóhoz kapott eredményeket ábrázoltam a viszonyított karcsúság – csökkentő tényező diagramon. A 63. ábrán látható az S355-ös anyagból készült gerendához, illetve az S960-as övekből és S355-ös gerincből álló hibrid tartóhoz tartozó görbe. Azt tapasztaltam, hogy a görbe a kis karcsúságok esetén magasabban halad, majd hozzávetőlegesen egybeesik a determinisztikus vizsgálat görbéivel. A különbség az eltérő sajátfeszültség modellekkel magyarázható, a nagyszilárdságú acélok esetén kisebb volt az imperfekció. Ez alapján az valószínűsíthető, hogy nagyszilárdságú acélok alkalmazása esetén a „b” kihajlási görbe helyett, az „a” kihajlási görbét lehet használni a csökkentő tényező meghatározásához megfelelő biztonság mellett. Ennek igazolása természetesen további vizsgálatokat igényel.

### 13. Összefoglalás

A diplomamunkámban a trapézlemez-gerincű tartók kifordulását vizsgáltam. Első lépésben megismerkedtem ezzel a szerkezet típussal, bemutattam az általános jellemzőiket és a fő alkalmazási területeiket. Ezt követően a kifordulás jelenségének szempontjából áttekintettem az eddigi szakirodalmi eredményeket, kutatásokat, illetve a méretezés elméleti módszereket. Ezután kidolgoztam egy fejlett numerikus modellt, amelyet egy valós fizikai kísérletsorozat alapján validáltam.

A modellezés során felmerült, ezért megvizsgáltam, hogy milyen hatása van annak, hogy a gerinc milyen szakasszal indul (párhuzamos vagy ferde), de lényeges különbséget nem tapasztaltam, se a rugalmas kritikus nyomaték, se a kifordulási ellenállás tekintetében, ezért a determinisztikus vizsgálat során egyedül ferde, pontszimmetrikus trapézlemez-profil alkalmaztam.

Elemeztem, hogy milyen hatása van a megtámasztásnak a rugalmas kritikus nyomatéokra, majd összevettem a numerikusan kapott eredményeket a szakirodalmi képletek eredményével. A megtámasztás módjának kifordulási ellenállásra vonatkozó hatását is megvizsgáltam és ennek kapcsán ellenőriztem, hogy a megtámasztás változtatása ellenére a numerikus vizsgálatok során kapott viszonyított karcsúság – csökkentő tényezők azonos görbére esnek-e, majd mivel ez beigazolódott, a determinisztikus vizsgálatban már csak egyféle megtámasztással dolgoztam.

A kifordulási ellenállás meghatározására két módszer van, a numerikus modell alapú méretezési eljárások és a szemi-empirikus méretezési eljárások. Az első esetében egy fejlett végeeselemes modellen geometriai és anyagilag nemlineáris analízist végzünk, és ebből határozzuk meg a kifordulási ellenállást, ehhez tehát pontos imperfekciók szükségesek. Meghatároztam, hogy a szabvány által előírt  $L/1000$  nagyságú geometriai hibának és a sajátfeszültségnek az együttes hatását milyen ekvivalens geometriai imperfekcióval lehet helyettesíteni. Az imperfekció-érzékenységi futtatások eredménye alapján  $L/350$ -es ekvivalens geometriai imperfekció a biztonság oldalán lévő eredményre vezet minden vizsgált geometria esetén..

A másik lehetőség a kifordulási ellenállás meghatározására az, hogy a viszonyított karcsúság alapján meghatározzuk a csökkentő tényező értékét, és a síklemez-gerincű tartók esetével megegyező módon meghatározzuk a teherbírást – ehhez azonban tudnunk kell, hogy a szabvány melyik kihajlási vagy kifordulási görbéje alkalmazható kellő biztonsággal trapézlemez-gerincű tartók esetén. Ehhez a megközelítéshez a szabvány előírásait követve  $L/1000$  geometriai imperfekció és a sajátfeszültség együttes hatását vettem figyelembe a determinisztikus vizsgálat során. A determinisztikus vizsgálat eredménye azt mutatta, hogy az EN1990 szabvány által

előírt  $L/1000$  geometriai imperfekció és a sajátfeszültségek hatására a kifordulási csökkentő tényezők értékei az „a” és a „b” kihajlási görbe között vannak, de a statisztikai kiértékelés alapján az „a” és „b” kihajlási görbe, és a „c” és „d” kifordulási görbe egyaránt kellő biztonsággal alkalmazható  $\gamma_{MI} = 1,1$  parciális tényező alkalmazásával. A vizsgált görbék közül a „b” kihajlási görbe használata esetén adódott a legkisebb parciális tényező. A numerikusan kapott rugalmas kritikus nyomatékokat ebben az esetben is összehasonlítottam a szakirodalmi ajánlásokkal.

A determinisztikus vizsgálat eredményei alapján meghatároztam, hogy az egyes karcsúságok esetén milyen helyettesítő geometriai imperfekció alkalmazásával kapható vissza a szabvány egyes kihajlási, illetve kifordulási görbéihez tartozó teherbírás érték. A négy görbe esetére megadtam négy közelítő függvényt, amelyek egyedül a viszonyított karcsúságtól függenek. Ennek értelmében az „a” kihajlási görbe, valamint a „c” kifordulási görbe alkalmazása esetén bizonyos karcsúsági tartományokban  $L/350$ -nél kisebb helyettesítő geometriai imperfekciót is biztonságosan alkalmazhatunk a modellezés során.

Végül megvizsgáltam az anyagminőség hatását a kifordulási ellenállásra, amelyből az derült ki, hogy a karcsúság növekedésével egyre kisebb hatása van az anyagminőségnek. Ezen vizsgálat keretein belül nagyszilárdságú acél és hibrid tartókat is vizsgáltam, és jól látható volt, hogy trapézlemez-gerincű tartók esetén a gerinc hatása gyakorlatilag elhanyagolható. A viszonyított karcsúság – csökkentő tényező diagramon ábrázolt eredmények pedig arról árulkodtak, hogy a nagyszilárdságú acél tartók kifordulásra kedvezőbben viselkednek a normál szilárdságú tartóknál, várhatóan egyel „magasabb” kihajlási/kifordulási görbék használhatók esetükben.

## Irodalomjegyzék

- [1] Jáger, B., Kövesdi, B., Dunai, L.: „Experimental study on the lateral-torsional buckling strength of trapezoidally corrugated web girders”, *Proceedings of Annual Stability Conference, St. Louis, Missouri, USA*, 2019.
- [2] Herzog, M.: „*Leichtträger mit Faltensteg*”, *Stahlbau*, Vol. 57, No. 8, pp. 246-249, 1988.
- [3] Elgaaly, M., Dagher, H.: „Beams and girders with corrugated webs”, *Proceedings of Annual Technical Session, SSRC*, pp. 37-53, 1990.
- [4] Palmer, H. R.: „*Application of Corrugated Metallic Plates to Building Purposes*”, Specification No. 5786, London, 1829.
- [5] Zeman ATH Kft. – *Hullámlemez-gerinces I tartó*, Tervezési segédlet
- [6] <https://sinprofile.com/en/sinprofile-en/>
- [7] Cheyrezy, M., Combault, J.: „Composite bridges with corrugated steel webs - achievements and prospects”, *IABSE reports*, Zürich, Schweiz, 1990.
- [8] <https://structurae.net/en/structures/arbois-bridge>
- [9] Dannecker, S.: „*Verbundtragwerke mit profilierten Stahlstegen im Brückenbau*”, Diplomarbeit (ILEK 7), Universität Stuttgart, Institut für Leichtbau, Entwerfen und Konstruieren, 2003.
- [10] Nather, F.: „Verbundbrücken – Stand der Technik – Perspektiven für die Zukunft”, *Stahlbau*, Vol. 59, No. 10, pp. 289-299, 1990.
- [11] Ikeda, S., Sakurada, M.: „Development of hybrid prestressed concrete bridges with corrugated steel web construction”, *30<sup>th</sup> Conference on Our world in concrete & structures*, Singapore, Japan, 2005.
- [12] Yamazaki, J.: „Composite Bridges with Corrugated Steel Webs to Meet Environmental Needs by Innovative Bridge Engineering”, *Innovative Materials and Techniques in Concrete Construction, Conference paper*, pp 315-328, 2011.
- [13] <https://structurae.net/en/structures/omiodori-bridge>
- [14] Lindner, J.: “Lateral torsional buckling of beams with trapezoidally corrugated webs.” *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Colloquium on Stability of Steel Structures*, Budapest, Hungary, 79-82., 1990.
- [15] Larsson, M., Persson, J.: „*Lateral-torsional buckling of steel girders with trapezoidally corrugated webs*”, Master’s Thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2013
- [16] Lopes, G. C., Couto, C., Real, P.V., Lopes, N.: „Elastic critical moment of beams with sinusoidally corrugated webs”, *Journal of Constructional Steel Research*, 129 185-194, 2017.
- [17] Jáger, B.: „*Acél trapézlemez-gerincű gerendák kifordulási ellenállásának vizsgálata, méretezési háttér fejlesztése*”, Kiválósági ösztöndíjjal támogatott kutatások az Építőmérnöki karon Konferencia, Budapest, 2020. május 27.
- [18] Ádány, S., Dulácska, E., Dunai L., Fernezely, S., Horváth, L., Kövesdi, B.: „*Acélszerkezetek, Tervezés az Eurocode alapján*”, 2., bővített kiadás, Artifex Kiadó Kft, 2016.

- [19] Guo, C., Papangelis, J.: „Torsion of beams with corrugated webs”, *Proceedings of the Ninth International Conference on Advances in Steel Structures*, Hong Kong, China, 5-7 December, 373-382., 2018.
- [20] EN 1990, Eurocode: *Basis of structural design*, CEN, 2011.
- [21] EN 1993-1-1, Eurocode 3: *Design of steel structures - Part 1.1: General rules and rules for buildings*, CEN, 2011.
- [22] Farkas, Gy., Lovas, A., Szalai, K.: „A tartószerkezeti tervezés alapjai az Eurocode szerint”, *Közúti és mélyépitési szemle*, 56. évfolyam, 7. szám, pp. 7-15, 2006.
- [23] Dr. Iványi M.: „*Acélszerkezetek tervezése az Eurocode szerint*”, Elektronikus jegyzet
- [24] Kövesdi, B., Somodi, B.: „Comparison of safety factor evaluation methods for flexural buckling of HSS welded box section columns”, *Structures*, 15 43-55, 2018.
- [25] Kövesdi, B.: „*Innovatív, trapézlemez gerincű öszvér és hibrid hidgerendák fejlesztése*”, Hidász Napok, Siófok, 2018.
- [26] Joint Committee of Structural Safety (JCSS), *Probabilistic model code*, Internet Publication, 2002.
- [27] Dunai, L., Horváth, L., Kovács, N., Varga, G., Verőci, B.: „*Acélszerkezetek méretezése Eurocode 3 szerint*”, Gyakorlati útmutató
- [28] ANSYS® v16.2, *Mechanical APDL Documentation*, Advanced Analysis Guide, Probabilistic Design
- [29] Gardner, L., Yun, X., Fieber, A., Macorini, L.: „Steel Design by Advanced Analysis: Material Modeling and Strain Limits”, *Engineering*, 5 243-249, 2019.
- [30] Chan, TM, Gardner, L.: „Bending strength of hot-rolled elliptical hollow sections”, *J Construct Steel Res*, 64(9):971–86, 2008.
- [31] Jáger, B., Dunai, L.: „Nonlinear imperfect analysis of corrugated web beams subjected to lateral-torsional buckling”, *Engineering Structures*, Vol. 245, 112888.